Петър Копанов

Математиката през 20 век

За повечето естествени науки може лесно да се прецени как са се развивали през определен период от време. Резултатите от тях се виждат от обществото и лесно могат да бъдат оценени. За химията например – по новите материали, създадени през съответния период. За физиката – по новите явления. За техниката – по новите машини и т.н. Не така стои въпросът с математиката. Тя винаги е стояла някак отделно от другите природни науки. Тя сама не създава нови продукти и технологии, които да бъдат пред очите на хората. Нещо повече, самата математика е някак недействителна – човек не може да я види, чуе, пипне. Сякаш съществува само в съзнанието на хората. Въпреки това тя е нещо съвсем реално и оказва влияние върху повечето човешки дейности. Възниква обаче въпросът – как да оценим развитието на тази наука, която сама не създава реални обекти и дори не работи с такива. Без реална оценка за развитието, перспективите и приложението на дадена наука трудно може да се разчита че обществото ще я поддържа. И така – как се развиваше математиката през отминалия 20 век? Има поне два достатъчно разумни подхода в опита да се отговори на този въпрос: единият е какво влияние е оказала математиката на другите области на човешкото познание, другият е да се посочат и оценят постиженията на самата математика. В тази статия ще се спрем на втория подход. Той е по-труден, тъй като тези постижения не съществуват като реални обекти. Този проблем стои пред математиците от много време и е източник на много спорове и спекулации по темата – включително и до пълното отричане на математиката като наука!

Другата крайност е, че математиката е с божествен произход и е достъпна само за богоизбрани. Ще отбележим само, че и двете крайности „не вършат работа“ и поради това ще ги оставим без коментар.

И така, как да оценим развитието на математиката през 20 век? За щастие имаме нелоша отправна точка. На Международния конгрес на математиците, проведен в Париж през 1900 година, един от най-големите измежду тях, Давид Хилберт, предлага на вниманието на своите колеги 23 проблема, които да бъдат решени до 2000 година. Докладът му, озаглавен „Математически проблеми“ е прочетен на 8 август 1900 година. Този доклад е уникално явление в историята на математиката и математическата литература. Нито преди, нито след това математиците не са правили съобщения или доклади, обхващащи проблемите на математиката като цяло. Днес, сто години по-късно, докладът на Хилберт представлява удобна отправна точка за равносметка. По-долу ще се спрем накратко на съдържанието му.

Докладът започва с обща част, в която се разсъждава не само за значението на „добре поставената“ специална задача, но и се изказват разсъждения за математическата строгост, за връзката на математиката с естествените науки. В заключение Хилберт с голяма убеденост формулира основния си тезис – „аксиомата“ за разрешимост в широк смисъл на всяка математическа задача – тезис, съдържанието на който е дълбоката увереност в неограничената мощ на човешкия ум и човешкото познание и безапелационното отхвърляне на агностицизма:

„… ето проблемът, или решението. Ти можеш да го намериш с помощта на чистото мислене. Защото в математиката не съществува Ignorabimus! («ние няма да знаем»).

Неизмеримо е множеството от проблеми в математиката, и щом един проблем бъде решен, на негово място изплуват безчислени нови проблеми. Разрешете ми… да формулирам няколко определени проблема от различни математически дисциплини, проблеми, изследването на които може значително да стимулира по-нататъшното развитие на науката.“

Любопитна е самата формулировка и последователността на проблемите: Хилберт започва с теорията на множествата (1. Проблемът на Кантор за мощността на континуума), и обосновката на математиката (2. Непротиворечивост на аритметичните аксиоми). След това преминава към основите на геометрията (3. Равенство на обемите на два тетраедъра с равнолицеви основи и равни височини, 4. Проблемът за правата като най-късо съединение между две точки), теорията на непрекъснатите групи (знаменитият пети проблем за освобождаване на понятието непрекъсната група от изискването за диференцируемост), теорията на числата (7. Ирационалност и трансцедентност на някои числа, 8. Проблемът за простите числа, 9. Доказателство на максимално общ закон за взаимност в произволно числово поле, 10. Задачата за разрешимост на диофантово уравнение). Следват проблеми от алгебрата (11. Квадратични форми с произволни алгебрични числови коефициенти, 12. Обобщаване теоремата на Кронекер за абелеви полета над произволна алгебрична област на рационалност, 13. Невъзможност за решаване на произволно уравнение от седма степен с помощта на функции само на два аргумента, 14. Доказателство крайността на зададена пълна система от функции), алгебричната геометрия (15. Строга обосновка на изчислителната геометрия на Шуберт, 16. Топология на алгебричните криви и повърхнини, 17. Представяне на определени форми като суми от квадрати) и геометрията (18. Построяване на пространство от конгруентни многостени). Сисъкът завършва с проблеми от анализа (19. Явяват ли се решенията на регулярна вариационна задача необходимо аналитични?, 20. Обща задача за граничните условия, 21. Доказателство за съществуването на линейни диференциални уравнения със зададена група на монодромия, 22. Униформизация на аналитични зависимости с помощта на автоморфни функции, 23. Развитие на методите на вариационното смятане). Особено е мястото на шестия проблем (6. Математическа формулировка на аксиомите на физиката). Горното изброяване е далеч от математическата строгост и има за цел само да покаже изключително широкия обхват на проблемите, а не да ги формулира строго.

Хилбертовите проблеми са изключително разнородни по своя характер. Някои са съвсем конкретни въпроси, изискващи еднозначен отговор „да“ или „не“. Такива са 3 и 7 проблем. В други случаи задачата е по-неопределена, например в 12 проблем. 23 проблем по същество е проблем за по-нататъшното развитие на вариационното смятане.

Каква е равносметката днес? Някои от проблемите са били решени сравнително бързо. Например проблем 3 е решен от Макс Ден в 1902 година. Други са далеч от завършване. Например проблем 6. Самият Хилберт по друг повод е казал, че „физиката е прекалено трудна за физиците“. Колмогоров аксиоматизира теорията на вероятностите, Джон фон Нойман и други успяват да формализират квантовата механика, но като цяло проблемът е открит, особено в областта на елементарните частици и квантовата теория на полето. Най-изненадващи за самия Хилберт са отрицателните решения на първия и втория проблем през трийсетте години от Курт Гьодел. През 1931 година Гьодел доказва две теореми за непълнота. Първата теорема за непълнота твърди, че ако една формална система на аритметиката е непротиворечива, то в нея се съдържа формално неразрешимо твърдение (с други думи съществува формула А такава, че нито А, нито нейното отрицание, са теореми в системата). Втората теорема за непълнота твърди, че в качеството на А може да се вземе формула, която по естествен начин изразява непротиворечивостта на аритметиката. Тези две теореми са изключително важни. Те показват принципната неосъществимост на Хилбертовата програма за пълна формализация на математиката и обосноваването на получената формална система чрез доказване на нейната непротиворечивост с финитни методи. Малко преди пенсионирането си през 1930 година Хилберт произнася реч в Кьонигсберг пред Дружеството на немските учени и лекари, в която заявява: „Ние трябва да знаем. Ние ще знаем“. Тези думи са изсечени на гроба му в Гьотинген. Гьодел обаче всъщност показва, че не можем винаги да знаем. Някои от проблемите са решени по-бързо, отколкото Хилберт е очаквал – например проблем 7 е решен от Александър Гелфонт през 1934 година. В пълна противоположност проблем 18 не бе решен допреди 8 години. Този проблем, известен още като пакетиране на сфери, всъщност датира още от времето на Йохан Кеплер.

Каква е равносметката? Като цяло програмата на Хилберт от 23 проблема е успешно решена (някои от тях – в отрицателен смисъл). Крайният резултат е, че днес много по-ясно и дълбоко осъзнаваме възможностите и ограниченията на науката математика. Разбира се, тази програма съвсем не изчерпва сериозните постижения на чистата математика през XX век. Достатъчно е да споменем създаването на нестандартния анализ през 60-те години от Ейбръхам Робинсън, с който отново се въвеждат (вече съвсем строго!) безкрайно малките и безкрайно големите числа, „тормозили" цели поколения математици след въвеждането им от Нютон и Лайбниц и „успешно изхвърлени" от Коши и Вайерщрас през XIX век. Всъщност според скромното мнение на автора на настоящите редове само това постижение е достатъчно, за да оправдае усилията на хората, работещи в областта на теоретичната математика през настоящото столетие. А този резултат съвсем не е изолиран.

Естествено възниква и въпросът: а оттук нататък? Безспорно математиката тепърва ще се развива, при това далеч не като изолирана наука. Влиянието и върху другите науки (а и на тях върху нея) видимо расте буквално с всеки изминал ден. Как, с каква скорост и в каква посока, в момента е практически невъзможно да се прецени обективно. Звучи парадоксално, но „най-точната наука" не може да бъде „изчислена" накъде и колко бързо ще се движи. И тази неизвестност е едно от най-вълнуващите неща в нея.

Накрая ще завършим с една бележка от доклада на Хилберт: „Един стар френски математик е казал: Една математическа теория не може да се разглежда като завършена, докато не ви е толкова ясна, че да можете да я обясните на първия срещнат на улицата." Погледнато така, пред математиците има още много работа.

КРАЙ