

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Fizyki

Praca magisterska

**Wyznaczanie parametrów układów
podwójnych zaćmieniowych
FM Leo i FK Leo**

Milena Ratajczak

Promotor: prof. UAM dr hab. Maciej Konacki
Opiekun: dr Wojciech Dimitrow



Poznań, 2008

Dziękuję
prof. Maciejowi Konackiemu za motywację i dyskusję,
dr Wojciechowi Dimitrow za pomoc doraźną, cenne rady i cierpliwość,
dr Tomaszowi Kwiatkowskiemu za dostęp do danych obserwacyjnych,
mgr Krzysztofowi Kamińskiemu za udostępnienie skryptu redukcyjnego,
mgr Krzysztofowi Hełminiakowi za atmosferę twórczą.

Streszczenie

Niniejsza praca opisuje sposób i rezultaty wyznaczania parametrów fizycznych i orbitalnych układów gwiazd podwójnych zaćmieniowych typu SB2: FM Leo i FK Leo. Wielkości charakteryzujące gwiazdy oszacowano na podstawie analizy danych spektroskopowych pochodzących z 1.9 metrowego teleskopu DDO w Kanadzie oraz fotometrii z przeglądu ASAS. Dostępna literatura nie zawiera żadnych szczegółowych danych na temat parametrów tych układów.

Wyznaczenie prędkości radialnych wykonano techniką korelacji krzyżowej, przy użyciu dwóch metod: korelacji jednowymiarowej i dwuwymiarowej TODCOR. W przypadku pierwszego z badanych układów w rezultacie użycia obu metod uzyskano podobne rezultaty: dwie krzywe prędkości radialnych. Dla drugiego z badanych układów, którego składnikiem jest gwiazda słaba, w wyniku zastosowania metody korelacji jednowymiarowej uzyskano jedną krzywą RV. W rezultacie użycia metody TODCOR otrzymano dwie krzywe prędkości radialnych.

Parametry charakteryzujące analizowane układy wyznaczono za pomocą programu *PHOEBE* bazującego na metodzie Wilsona - Devinney'a. W celu weryfikacji ich poprawności dokonano porównania z modelami budowy i ewolucji gwiazd wyznaczając jednocześnie wiek układów (2 - 2.5 mld lat dla FM Leo, 2.2 mld lat dla FK Leo). Dodatkowym testem uczyniono wyznaczenie odległości do analizowanych obiektów i porównanie jej z wartościami z Hipparcosa. Rezultaty wskazują na spójność uzyskanych rozwiązań z wartościami oczekiwanymi.

Abstract

The following work summarizes the results of determination of physical and orbital parameters of two detached double-lined eclipsing binaries: FM Leo and FK Leo. We obtained them from the analysis of spectroscopic observations from the 1.9 m telescope in DDO (Canada) and photometric data from the ASAS survey. No previous photometric and spectroscopic solution exists in the literature for any of the targets.

In order to determine the radial velocities of components, one- and two- dimensional cross correlation techniques have been used. In the case of FM Leo, we have derived radial velocity curves for every component using both methods. For the second eclipsing binary, whose secondary is faint, in the case of one-dimensional cross correlation only one radial velocity curve has been obtained. As a result of using the two-dimensional method, TODCOR, we successfully have derived both RV curves.

The orbits and physical parameters of FM Leo and FK Leo have been estimated using *PHOEBE* which is based on the Wilson - Devinney method. As a test, we have compared them with the evolutionary models and estimated the age of binaries (2 - 2.5 Gyr for FM Leo, 2.2 Gyr for FK Leo). Additionally, we have estimated the distance to the binaries - it agrees within the error bars with the Hipparcos parallaxes for both systems.

Spis treści

Spis treści	i
Wstęp	1
Wprowadzenie	1
Cel pracy	2
1 Wykorzystanie układów podwójnych zaćmieniowych do wyznaczenia parametrów gwiazd	3
1.1 Klasyfikacja układów podwójnych	3
1.1.1 Klasyfikacja pod względem metod obserwacyjnych	3
1.1.2 Klasyfikacja morfologiczna	5
1.2 Efekty obserwowalne	6
1.3 Wyznaczanie parametrów składników układów podwójnych zaćmieniowych	10
1.3.1 Wyznaczanie póloli wielkich orbit i mas gwiazd	11
1.3.2 Wyznaczanie promieni gwiazd	15
1.3.3 Wyznaczanie stosunku temperatur efektywnych	15
1.4 Układy podwójne zaćmieniowe jako test teorii ewolucji gwiazd . . .	17
2 Ścieżki ewolucyjne i izochrony	23
2.1 Wprowadzenie	23
2.2 Ewolucja gwiazd	23
2.3 Ścieżki ewolucyjne	25
2.4 Izochrony	28
2.4.1 Przegląd	31
2.4.2 Izochrony Y^2	31
2.4.3 Izochrony Y^2 w praktyce	33
3 Metoda korelacji krzyżowej	37
3.1 Wstęp	37

3.2	Korelacja jednowymiarowa	37
3.2.1	Algorytm korelacji jednowymiarowej	38
3.2.2	Oszacowanie rozrzutu rozkładu przesunięcia i prędkości	39
3.2.3	Analiza błędów	41
3.3	Ograniczenia korelacji jednowymiarowej	43
3.4	Korelacja dwuwymiarowa	45
3.4.1	Wprowadzenie	46
3.4.2	Algorytm korelacji dwuwymiarowej	47
3.4.3	Test metody	49
3.5	Metoda największej wiarygodności - nowe podejście do połączenia funkcji korelacji krzyżowej	50
3.5.1	Od metody największej wiarygodności do korelacji krzyżowej	51
3.6	Połączenie funkcji korelacji krzyżowej	54
4	Wyznaczanie parametrów układów podwójnych zaćmieniowych	
	FM Leo i FK Leo	61
4.1	Wprowadzenie	61
4.2	Redukcja widm i pomiar prędkości radialnych	61
4.2.1	Redukcja widm	61
4.2.2	Wyznaczanie prędkości radialnych	63
4.3	Modelowanie układów	66
4.3.1	Metoda WD	66
4.3.2	Program PHOEBE	75
4.4	Wyniki	76
4.4.1	FM Leo	76
4.4.2	FK Leo	85
5	Podsumowanie	99
	Spis symboli i skrótów	103
	Spis rysunków	104
	Spis tabel	110
	Bibliografia	111

Wstęp

Wprowadzenie

Układy podwójne gwiazd zajmują szczególne miejsce we współczesnej astrofizyce. Jest to spowodowane zarówno ich liczebnością, jak i istotnością. Powszechnie jest twierdzenie, że układy podwójne i wielokrotne stanowią zdecydowaną większość obserwowanych gwiazd (Kallrath & Milone, 1999). Pogląd ten nie uwzględnia jednak czerwonych karłów typu M, które stanowią aż 70% populacji gwiazd (Lada, 2006). Nie zmienia to jednak faktu istotności układów podwójnych. Stanowią one bowiem doskonały test rozległej teorii ewolucji gwiazd. Badania nad nimi są źródłem unikatowych informacji na temat podstawowych właściwości gwiazd. Przykładem może być możliwość bezpośredniego wyznaczenia masy obiektu, która wymaga pomiarów oddziaływań grawitacyjnych pomiędzy dwoma obiektami (galaktyka - galaktyka, gwiazda - gwiazda, gwiazda - planeta, planeta - satelita). W przypadku dwóch galaktyk, odległości do nich są na tyle duże, że uniemożliwiają wykrycie ich wzajemnego ruchu na płaszczyźnie nieba. W przypadku układu gwiazdy i planety, tylko niezwykle duża rozdzielczość teleskopu powoduje detekcję ruchu spowodowaną oddziaływaniami grawitacyjnymi. Zatem tylko układy gwiazd podwójnych pozwalają na analizę ich wzajemnego ruchu, wyznaczenie mas oraz badanie innych własności obu składników.

Najdokładniejsze oszacowanie parametrów charakteryzujących gwiazdę można otrzymać rozpatrując rozdzielone, spektralnie podwójne układy zaćmieniowe. Na podstawie danych obserwacyjnych tych układów - krzywych zmian blasku i prędkości radialnych, poza masą możemy wyznaczyć także dodatkowe parametry opisujące układ, np. półosie wielkie orbit, promienie składników, stosunek strumieni promieniowania, a z niego - stosunek temperatur efektywnych gwiazd.

Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie parametrów fizycznych (m.in. masy, promienie, temperatury) i orbitalnych (m.in. półoś wielka orbity, nachylenie) opisujących dwa układy podwójne zaćmieniowe: FM Leo i FK Leo, a także oszacowanie wieku rozważanych obiektów i sprawdzenie ich statusu ewolucyjnego. Wyznaczenie parametrów układów przeprowadzono w oparciu o kod Wilsona - Devinneya (WD) za pomocą programu *PHOEBE*, służącego do modelowania układów zaćmieniowych na podstawie obserwowanych zmian jasności i prędkości radialnych układu.

Praca zawiera dodatkowo rozległy opis metod wyznaczania prędkości radialnych składników (korelacja krzyżowa jednowymiarowa i dwuwymiarowa: TOD-COR) oraz ich porównanie, a także opis zastosowania wyżej wymienionych procedur w praktyce. W pracy zamieszczono także przegląd informacji na temat sposobu generowania ścieżek ewolucyjnych i izochron.

Rozdział 1

Wykorzystanie układów podwójnych zaćmieniowych do wyznaczania parametrów gwiazd

1.1 Klasyfikacja układów podwójnych

Podwójne układy gwiazdowe podlegają dwóm klasyfikacjom: związaną z metodami obserwacji oraz morfologiczną. Poniżej przedstawiono opis każdej z nich oparty na informacjach zaczerpniętych głównie z książki *Eclipsing Binary Stars* (Kallrath & Milone, 1999).

1.1.1 Klasyfikacja pod względem metod obserwacyjnych

Układy podwójne dzielimy na:

- wizualne
- spektroskopowe
- zaćmieniowe

W układach wizualnie podwójnych każdy składnik można zaobserwować z osobna. Rozdzielenie układu związane jest z dużą separacją składników, zatem okresy obiegu gwiazd są zazwyczaj bardzo długie (kilka - kilka tysięcy lat). Obserwacje pozwalają na wyznaczenie kształtu i względnych rozmiarów orbit składników oraz nachylenia płaszczyzny orbity.

Z równania środka masy otrzymujemy zależność

$$M_1 a_2 = M_2 a_1, \tag{1.1}$$

gdzie M_1 , M_2 to masy składników, a a_1 i a_2 to półosie wielkie orbit gwiazd. Korzystając z III prawa Keplera:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{P^2} = G \frac{M_1 + M_2}{(a_1 + a_2)^3}, \quad (1.2)$$

gdzie ω to prędkość kątowna, a P to okres, otrzymujemy drugą zależność wiążącą ze sobą masy składników. W większości przypadków nie jesteśmy w stanie wyznaczyć a_1 i a_2 , tylko względną półoś układu będącą sumą półosi składników $a = a_1 + a_2$. W przypadku układów spektroskopowo podwójnych jest to wielkość liniowa, jednak dla układów wizualnych uzyskujemy wielkość kątowna. By wyznaczyć liniową wielkość półosi wielkiej wymagana jest znajomość paralaksy. W związku z ograniczeniami wyznaczania paralaksy, metoda ta stosowana jest tylko w przypadku odległości do układu nie większej niż 30 parseków. Sytuację poprawiają specjalne projekty np. Hipparcos (1989 - 1993), która osiągając dokładność ~ 0.001 sekund łuku, zarejestrowała 12 915 układów podwójnych lub wielokrotnych (Kallrath & Milone, 1999).

Gdy tylko jeden składnik układu jest widoczny, ponieważ drugi jest zbyt słaby lub zbyt bliski jasnego składnika, o podwójności układu mogą świadczyć efekty grawitacyjne. Układy, których podwójność wykrywana jest poprzez zmianę położenia widocznego składnika nazywamy astrometrycznie podwójnymi. Słabszy składnik może być teoretycznie widoczny, lecz w praktyce może niknąć w blasku składnika jaśniejszego. Przykładem takiego obiektu jest Syriusz B. Inny przypadek stanowią układy, gdzie składniki są zbyt blisko siebie, co wpływa na to, że nie można ich obserwacyjnie rozdzielić. Teoretyczna zdolność rozdzielcza teleskopu opisana jest wzorem:

$$\Delta = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (1.3)$$

gdzie Δ to minimalna odległość kątowna w radianach osiągalna przez teleskop, D - apertura teleskopu, λ - długość fali w tych samych jednostkach. Idealne warunki w przypadku obserwacji naziemnych są jednak nieosiągalne ze względu na obecność atmosfery i jej turbulencje - tzw. seeing. By zredukować jego wpływ, używa się systemów optyki adaptatywnej.

Układami spektroskopowo podwójnymi nazywamy gwiazdy, w których widmach obserwujemy przesunięcie linii widmowych składników wskutek ruchu orbitalnego wokół środka masy układu (efekt Dopplera). Ciąg obserwacji spektroskopowych pozwala na wyznaczenie przesunięć linii oraz krzywej prędkości radialnych dla każdej z gwiazd. Wyznaczenie stosunku mas w tych układach wymaga odpowiednich warunków - m.in. jasność względna obu składników nie powinna przekraczać 10. W przypadku uzyskania dwóch krzywych zmian prędkości radialnych (dla każdego ze składników) stosunek mas możemy wyznaczyć przez porównanie amplitud krzywych. Takie układy nazywane są układami spektroskopowymi z podwójnymi liniami (ang. *double-lined spectroscopic binary*, SB2).

Jeśli spektroskopowo widoczny jest tylko jeden składnik, układ nazywamy wówczas układem spektroskopowym z pojedynczymi liniami (ang. *single-lined spectroscopic binary*, SB1) .

Wyznaczenie mas i promieni gwiazd wymaga znajomości nachylenia orbity układu i , którego nie można wyznaczyć z danych spektralnych. Potrzebne są zatem dane fotometryczne. Jeśli orbita układu jest ustawiona krawędzią do obserwatora (ang. *edge-on*), a separacja składników odpowiednio mała, w układzie możemy obserwować zaćmienia oraz wyznaczyć krzywą zmian blasku (Light Curve, LC) . Układy takie nazywamy zaćmieniowymi. Prawdopodobieństwo zajścia zaćmienia zależy od rozmiarów orbity i gwiazd - im mniejsza orbita względem rozmiarów gwiazd, tym zaćmienie bardziej prawdopodobne. Analiza krzywej zmian blasku pozwala na wyznaczenie nachylenia i , mimośrodu orbity e , względnych rozmiarów i kształtów składników, stosunku mas oraz jasności. Jeśli dodatkowo dostępne są krzywe zmian prędkości radialnych - można wyznaczyć masy składników i pólósie wielkie ich orbit.

Pierwsze wyznaczone krzywe blasku układów zaćmieniowych zostały sklasyfikowane ze względu na ich kształt (Hall, 1996). Ta fenomenologiczna klasyfikacja (rysunek 1.1) dzieli układy zaćmieniowe na trzy grupy:

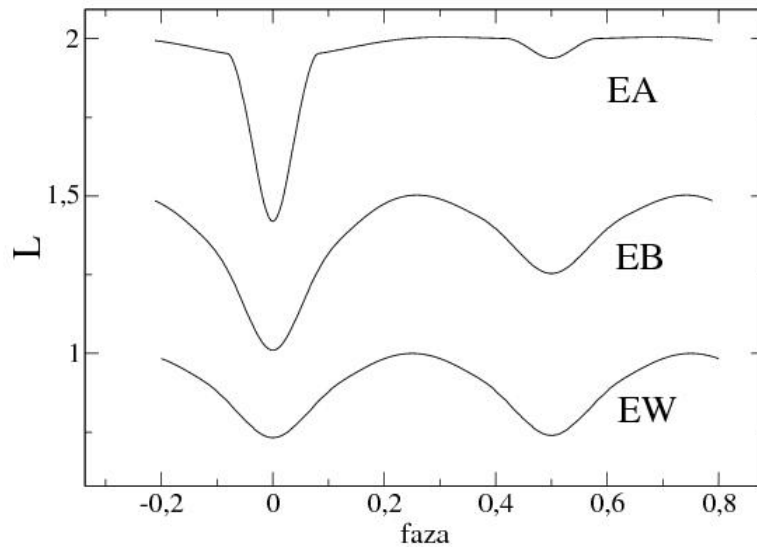
- typu Algola (zmiany blasku 2.2^m - 3.5^m , różna głębokość minimów, maksima stosunkowo płaskie)
- β Lyr (ciągłe zmiany blasku, elipsoidalne kształty składników, różna głębokość minimów)
- W UMa (ciągłe zmiany blasku, porównywalna głębokość minimów, krótkie okresy do 1 doby).

1.1.2 Klasyfikacja morfologiczna

Właściwości fizyczne układów podwójnych znajdują odzwierciedlenie w klasyfikacji morfologicznej (rysunek 1.2):

- układ rozdzielony (ang. *detached system*)
- układ półrozdzielony (ang. *semi-detached system*)
- układ kontaktowy (ang. *contact system*)
- układ ponadkontaktowy (ang. *over-contact system*)

Do opisu własności fizycznych gwiazd wykorzystany został model Roche'a, w którym wypełniają one pewne powierzchnie ekwipotencjalne. Krytyczna powierzchnia Roche'a (wewnętrzna otoczka) określa maksymalny rozmiar pojedynczej gwiazdy. Maksymalne powierzchnie Roche'a dwóch składników łączą się w punkcie Lagrange'a L_1 .



Rysunek 1.1: Klasyfikacja fenomenologiczna (EA - typ Algola, EB - typ β Lyr, EW - typ W UMa) (Dimitrov, 2007).

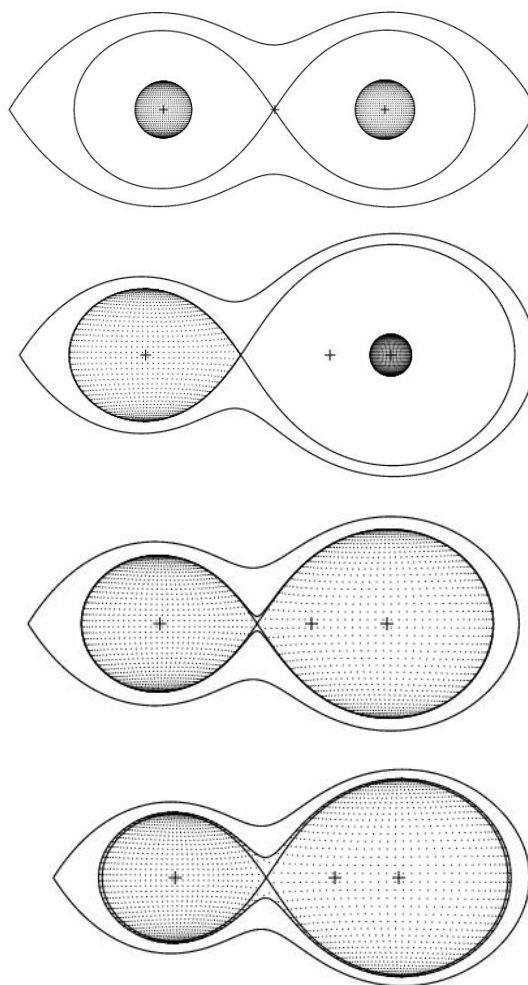
Układy, w których składniki nie wypełniają krytycznej powierzchni Roche'a, tylko znajdują się wewnątrz niej nazywamy układami rozdzielonymi. Jeżeli w trakcie ewolucji, któraś z gwiazd wypełni swoją powierzchnię krytyczną - układ staje się półrozdzielony. Następuje wówczas wypływ materii przez punkt Lagrange'a L_1 i jej opadanie na drugi składnik układu. Gdy oba składniki wypełniają powierzchnię Roche'a rozpatrujemy układ kontaktowy. W dalszej ewolucji układy przekształcają się w ponadkontaktowe, tworząc wspólną otoczkę.

Zewnętrzna otoczką lub zewnętrzną powierzchnią Roche'a nazywamy powierzchnię odpowiadającą potencjałowi, dla którego masa uchodzi poza układ. Jeśli więc układ ponadkontaktowy w swej ewolucji "rozrośnie się" i zacznie wypełniać całkowicie tę otoczkę - będzie tracił masę.

Istnieje zależność pomiędzy klasyfikacją fenomenologiczną i morfologiczną: układy półrozdzielone mają krzywe zmian blasku typu Algola, a układy ponadkontaktowe - typu W UMa. W przypadku krzywych zmian blasku typu β Lyrae odnotowujemy brak morfologicznego odpowiednika, gdyż mogą je produkować zarówno układy rozdzielone, półrozdzielone, jak i ponadkontaktowe.

1.2 Efekty obserwowalne

Informacji o układzie spektroskopowo podwójnym zaćmieniowym dostarczają nam dwie niezależne metody: fotometryczna i spektroskopowa. Na ich podstawie możemy uzyskać krzywą zmian blasku (zmiana jasności składników na wsku-

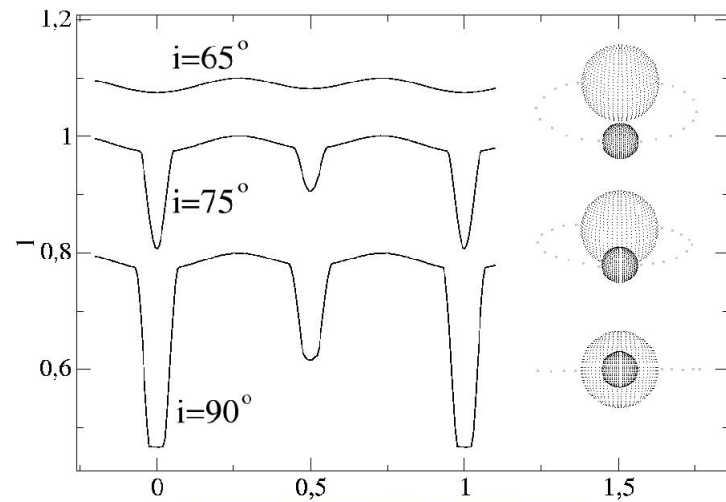


Rysunek 1.2: Klasyfikacja morfologiczna: układ rozdzielony, półrozdzielony, kontaktowy i ponadkontaktowy o maksymalnych możliwych rozmiarach (źródło: katalog gwiazd podwójnych CALEB).

tek wzajemnych zaćmień) oraz krzywą zmian prędkości radialnych (spowodowane efektem Dopplera - ruch orbitalny składników). Analiza kształtu, głębokości i czasów spadku jasności oraz charakteru i amplitudy zmian prędkości radialnych pozwala na wyznaczenie większości parametrów układu, w szczególności mas składników, ich promieni oraz parametrów orbitalnych. Informacja ta służy między innymi do wyznaczenia wieku układu, czy testowania teorii ewolucji gwiazd.

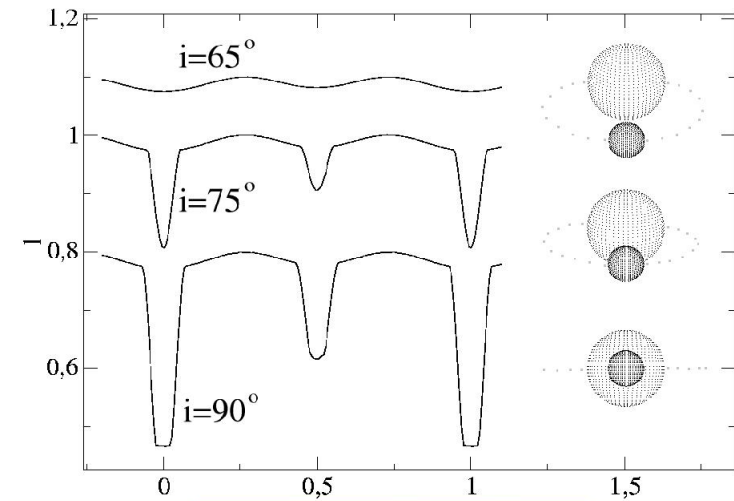
Parametry charakteryzujące układ wpływają na kształt krzywej zmian blasku (LC) i krzywej zmian prędkości radialnych (RV). Kształt LC zależy przede wszystkim od separacji składników, rozmiarów gwiazd i nachylenia orbity. Jeśli gwiazdy wypełniają w znacznym stopniu krytyczne powierzchnie Roche'a, za-

ćmienia możliwe są dla szerszego zakresu nachyleń. W przeciwnym przypadku, czyli gdy rozmiary gwiazd są małe w stosunku do separacji, zaćmienia są determinowane przez nachylenie orbity $i \approx 90^\circ$. Jeżeli składniki układu mają różne rozmiary, odpowiadające zaćmieniu minimum LC jest płaskie. Dla nachyleń $i < 90^\circ$ zachodzą zaćmienia niecentralne (gwiazda, która zaćmiewa nie znajduje się dokładnie na linii obserwator - gwiazda zaćmiewana), a przy nachyleniu granicznym (minimalne lub maksymalne nachylenie, przy którym cała gwiazda zaćmiewająca znajduje się na tle tarczy gwiazdy zaćmiewanej) można obserwować zaćmienia styczne. Poniżej tej wartości i zachodzą zaćmienia częściowe (część tarczy gwiazdy zaćmiewającej znajduje się poza tarczą gwiazdy zaćmiewanej). Krzywa zmian blasku charakteryzuje się wówczas mniejszą amplitudą zmian jasności. Zależność przebiegu LC od nachylenia orbity przedstawia rysunek (1.3).



Rysunek 1.3: Wpływ nachylenia orbity na kształt krzywej blasku (Dimitrov, 2007).

Kolejnymi parametrami wpływającymi na zmiany kształtu LC są rozmiary i kształt składników układu, opisywane w sposób ścisły przez potencjał powierzchniowy Ω . Wartości potencjału przyjmują przeważnie wartości z zakresu od 3 do 8 (wartość bezwymiarowa, przy założeniu, że odległość między składnikami jest równa jeden) (Prsa, 2006). Wysoki potencjał odpowiada małym rozmiarom i sferycznej symetrii gwiazdy, niski - dużym rozmiarom i kształtom "kropki". Zatem gwiazdy o niskim potencjale niemal wypełniają krytyczną powierzchnię Roche'a. Minimalna wartość Ω dla składnika układu rozdzielonego odpowiada wartości Ω dla powierzchni krytycznej lub punktu Lagrange'a L_1 . Przy tej wartości potencjału gwiazda jest silnie zniekształcona. Przez punkt L_1 może nastąpić wówczas przepływ masy do drugiego składnika układu. Stopień zniekształcenia przynajmniej jednego składnika możemy zaobserwować w maksimach krzywych zmian blasku. Dla eliptycznych składników obserwujemy charakterystyczne wybrzusze-



Rysunek 1.4: Wpływ nachylenia orbity na kształt krzywej blasku ($i < 90^\circ$) (Dimittrov, 2007).

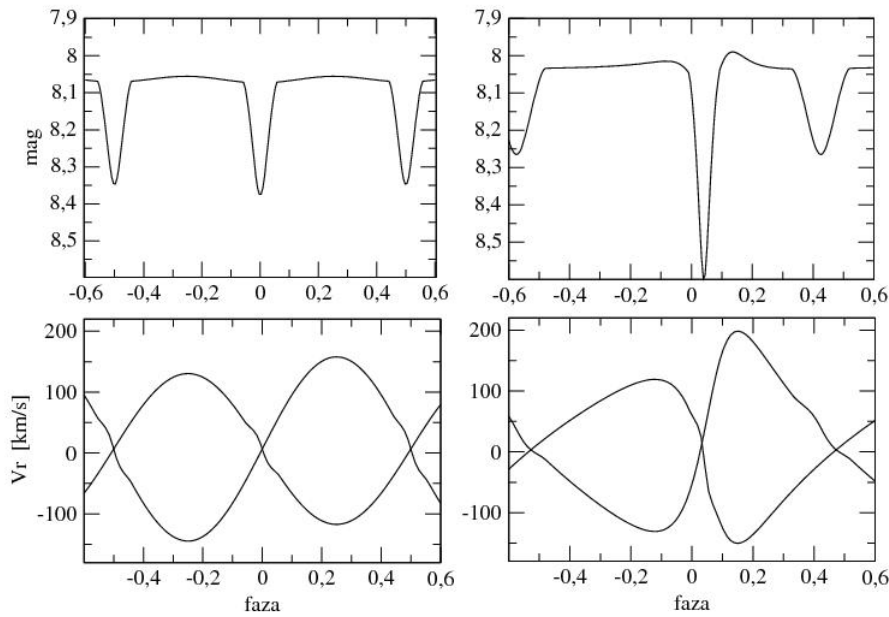
nie w fazach 0.25 i 0.75 (rys. 1.4). Na kształt LC wpływa także mimośród orbity. Układy bliskie, w których występują duże siły pływowe posiadają orbity kołowe. Spora część układów podwójnych posiada jednak orbity eliptyczne. Rozpoznamy je po przesuniętym minimum wtórnym w LC (przesunięcie fazowe pomiędzy minimami nie wynosi wówczas 0.5, jak w przypadku orbit kołowych; wyjątek stanowią 2 przypadki: długość peryastronu $\omega = 90^\circ$ i 270°). Poza przesunięciem minimów, obserwujemy także zniekształcenie maksimów. Na skutek niejednostajnego ruchu po orbicie, maksima mogą być asymetryczne. Porównanie LC dla orbity kołowej i eliptycznej dla tego samego układu znajduje się na rysunku 1.5.

W trakcie ruchu orbitalnego zmienia się wzajemna odległość składników i kształt powierzchni ekwipotencjalnych, które ograniczają gwiazdy. W przypadku małej odległości składniki są bardziej zniekształcone, co powoduje, że jedno z maksimów jest bardziej zakrzywione. Na rysunku (1.6) przedstawiony jest układ o orbicie eliptycznej ($e = 0.3$) dla różnych kątów długości peryastronu ω . Jest to równoważne z obserwowaniem układu z różnych kierunków bez zmiany nachylenia orbity. Głębokość zaćmień jest różna przede wszystkim na skutek różnej odległości między składnikami w trakcie obserwowanych zaćmień.

Poza zmianami w przebiegu LC, parametry układu wpływają także na zniekształcenia krzywych zmian prędkości radialnych (RV). Głównym czynnikiem wpływającym na kształt krzywych RV jest stosunek mas składników q definiowany jako

$$q = \frac{M_1}{M_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad (1.4)$$

gdzie K_1 i K_2 to odpowiednio amplitudy krzywych RV dla obu składników. Na kształt RV wpływa także półoś wielka układu a . Dla zadanego okresu orbitalnego



Rysunek 1.5: Porównanie krzywych blasku i prędkości radialnych dla tej samej pary gwiazd dla orbity kołowej i eliptycznej $e = 0.4$.

mniejsze wartości a odpowiadają mniejszym amplitudom zmian RV, co wynika ze wzoru (Kubiak, 1994):

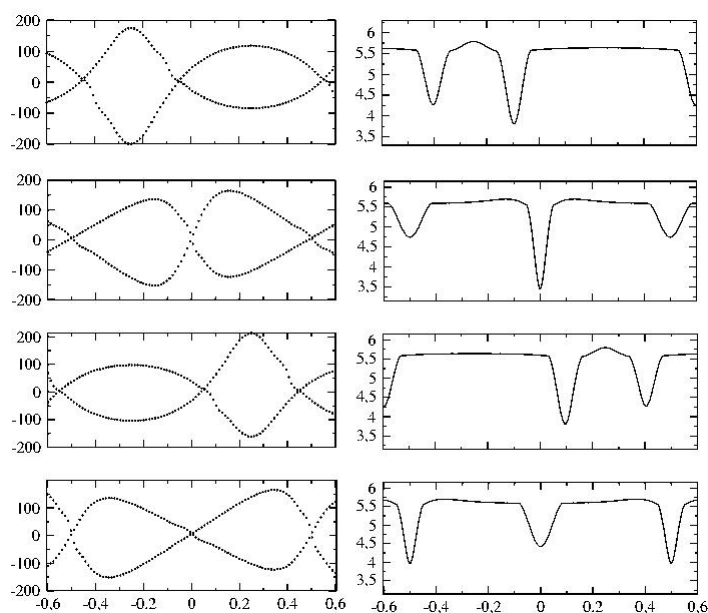
$$a \sin i = (K_1 + K_2) \cdot P \cdot 0.01976, \quad (1.5)$$

gdzie okres P jest w dobach, amplitudy $K_{1,2}$ w km/s, a pólś względna a w R_\odot .

1.3 Wyznaczanie parametrów składników układów podwójnych zaćmieniowych

Dla trzech typów układów podwójnych możemy wyznaczyć masy gwiazd (Shu, 2003). Są to układy wizualnie podwójne, dla których wyznaczono kształt orbit i znana jest odległość (paralaksa), układy wizualnie podwójne, dla których wyznaczono kształt orbit i znana jest prędkość radialna wzdłuż całych orbit oraz układy podwójne spektroskopowe zaćmieniowe typu SB2 .

Na podstawie danych obserwacyjnych układów zaćmieniowych SB2 - krzywej zmian blasku i prędkości radialnych, poza masą możemy wyznaczyć także dodatkowe parametry opisujące układ, np. pólś wielkie orbit, promienie gwiazd, stosunek strumieni promieniowania, a z niego - stosunek temperatur efektywnych gwiazd.



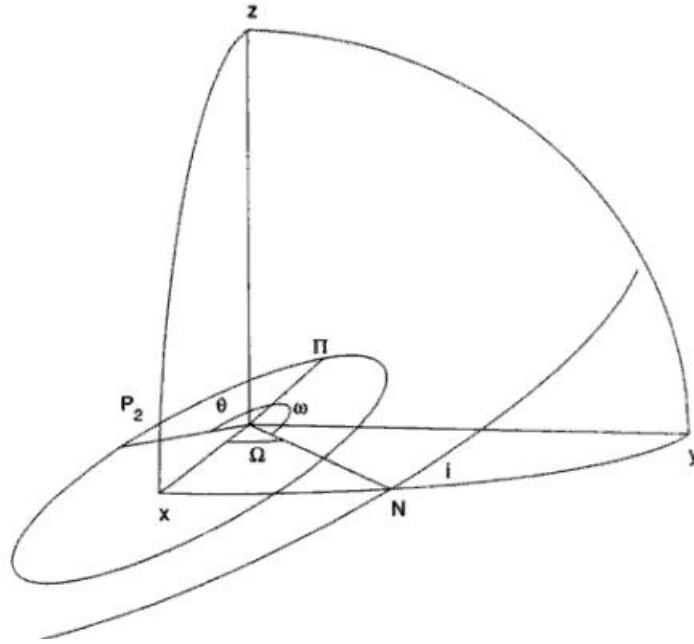
Rysunek 1.6: Krzywe zmian prędkości radialnych i blasku dla czterech wartości $\omega = 0, 1.57, 3.14, 4.71$ rad dla mimośrodu $e = 0.3$ (Dimitrov, 2007).

1.3.1 Wyznaczanie półośi wielkich orbit i mas gwiazd

Pole grawitacyjne wytwarzane przez układ dwóch gwiazd można przybliżyć polem będącym efektem istnienia dwóch punktowych mas znajdujących się wewnątrz tychże gwiazd, orbitujących wokół wspólnego środka masy przy założeniu, że rozważany układ podwójny jest rozdzielony, zatem jego składniki nie są zniekształcone - mają kształt kuli (Hilditch, 2001).

Rysunek 1.7 przedstawia względną orbitę układu podwójnego w przestrzeni trójwymiarowej zdefiniowaną przez kąty Ω (długość węzła wstępującego), i (nachylenie orbity) i ω (długość peryastronu). Należy zwrócić uwagę na fakt, iż oznaczenie Ω , które we wcześniejszych rozważaniach reprezentowało potencjał powierzchniowy odnosi się teraz do określenia położenia węzła wstępującego. Masa M_1 znajduje się w środku układu współrzędnych xyz . Masa składnika drugiego M_2 krąży po orbicie wokół masy M_1 i po czasie t znajduje się w P_2 . Obserwator patrzy na układ wzdłuż kierunku $0z$ ze strony dołu rysunku. N oznacza węzeł wstępujący, a θ - anomalię prawdziwą dla czasu t . Poniższe rozważania oparte są na informacjach zaczerpniętych z książki *An Introduction to Close Binary Stars* (Hilditch, 2001).

Współrzędne biegunowe gwiazdy o masie M_2 znajdującej się w punkcie P_2 względem początku układu współrzędnych wynoszą $(r, \theta + \omega)$. Promień wodzący łączący tę gwiazdę z początkiem układu współrzędnych możemy rozłożyć na dwie składowe: $r \cos(\theta + \omega)$ oraz $r \sin(\theta + \omega)$. Rzutuując drugą składową na kierunek



Rysunek 1.7: Orbita układu podwójnego w przestrzeni trójwymiarowej. Masa M_1 znajduje się w początku układu współrzędnych, masa M_2 zajmuje położenie w punkcie P_2 . Objaśnienie symboli w tekście (Hilditch, 2001).

patrzenia uzyskamy:

$$z = r \sin(\theta + \omega) \sin i. \quad (1.6)$$

Prędkość radialna obserwowana wskutek ruchu orbitalnego wynosi zatem

$$V_{rad} = \dot{z} = \sin i [\sin(\theta + \omega) \dot{r} + r \cos(\theta + \omega) \dot{\theta}]. \quad (1.7)$$

By wyznaczyć wartości \dot{r} użyjemy biegunowego równania elipsy

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (1.8)$$

po zróżniczkowaniu którego uzyskujemy

$$\dot{r} = \frac{e \sin \theta r \dot{\theta}}{(1 + e \cos \theta)}. \quad (1.9)$$

Dla wyznaczenia $\dot{\theta}$ skorzystamy z II prawa Keplera:

$$r^2 \dot{\theta} = 2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} P, \quad (1.10)$$

zatem prędkość radialną składnika układu możemy zapisać jako:

$$V_{rad} = K[\cos(\theta + \omega) + e \cos \omega] + \gamma, \quad (1.11)$$

gdzie

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{P(a - e^2)^{1/2}} \quad (1.12)$$

jest nazywane amplitudą krzywej prędkości radialnej, a γ jest prędkością radialną całego układu (środka mas).

Dla układów podwójnych typu SB2, w przypadku których krzywe prędkości radialnych mogą być wyznaczone dla obu składników, możliwe jest wyznaczenie mas składników. Dla gwiazd o masach $M_{1,2}$, zrzutowana półoś wielka $a_{1,2} \sin i$ może być wyznaczona bezpośrednio ze znajomości amplitudy $K_{1,2}$:

$$a_{1,2} \sin i = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{2\pi} K_{1,2} P. \quad (1.13)$$

By uzyskać masy obu składników skorzystajmy ze znanych zależności. Z równania środka masy mamy:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}, \quad (1.14)$$

a z III prawa Keplera

$$G(M_1 + M_2) = 4\pi^2 a^3 / P^2. \quad (1.15)$$

Zastępując M_2 uzyskujemy zatem zależność

$$M_1 + M_1 \frac{a_1}{a_2} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}. \quad (1.16)$$

Zauważmy, że

$$a \sin i = a_1 \sin i + a_2 \sin i, \quad (1.17)$$

gdzie a_1 i a_2 zostały wyznaczone wcześniej, zatem

$$M_1 \sin^3 i = \frac{4\pi^2}{GP^2} \frac{a^3 \sin^3 i}{1 + (a_1 \sin i)/(a_2 \sin i)}. \quad (1.18)$$

Używając wyrażenia na $a_{1,2} \sin i$ uzyskamy relację definiującą minimalne masy składników:

$$M_{1,2} \sin^3 i = \frac{1}{2\pi G} (1 - e^2)^{3/2} (K_1 + K_2)^2 K_{2,1} P. \quad (1.19)$$

Powyższe równanie podaje dokładne wartości mas dla nachylenia $i = 90^\circ$. Dla innych nachyleń wyrażenie wskazuje na dolny limit mas każdego ze składników układu.

Dla jednostki prędkości km/s i okresu podanego w dniach równania 1.13 i 1.19 możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} a_{1,2} \sin i &= (1.3751 \times 10^4) (1 - e^2)^{1/2} K_{1,2} P \text{ [km]} = \\ &= (1.9758 \times 10^{-2}) (1 - e^2)^{1/2} K_{1,2} P \text{ [R}_\odot\text{]}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$M_{1,2} \sin^3 i = (1.0361 \times 10^{-7}) (1 - e^2)^{3/2} (K_1 + K_2)^2 K_{2,1} P \text{ [M}_\odot\text{]}. \quad (1.21)$$

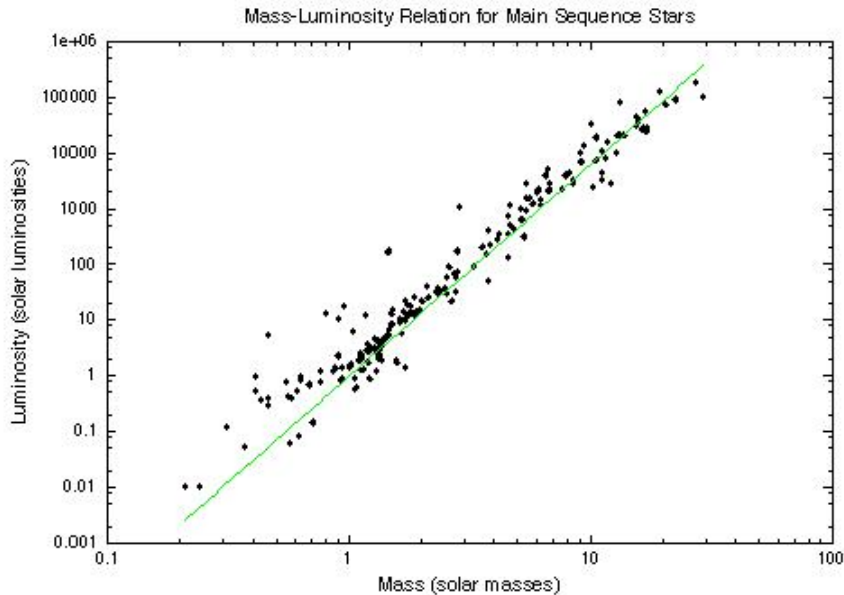
Zależność minimalnej masy od sześciangu jednej amplitudy prędkości i kwadratu drugiej w równaniu 1.21 prowadzi do stwierdzenia, że tylko dokładne pomiary prędkości radialnych dają w efekcie akceptowalne masy gwiazd. Gdy niepewność wyznaczenia amplitudy dla jednej z gwiazd wynosi 10%, wówczas wyznaczona masa może być obciążona błędem rzędu aż 30 %. Zatem amplitudy należy wyznaczyć z błędem maksymalnym 1%, by móc oszacować masy składników z dokładnością 3%.

W przypadku układów spektroskopowo podwójnych typu SB1, w których widoczny jest tylko jeden składnik układu, możemy wyznaczyć wartość jednej amplitudy K_1 , a stąd zamiast pólosi i masy oszacować jedynie wartość $a \sin i$ oraz wielkość zwaną funkcją masy definiowaną jako:

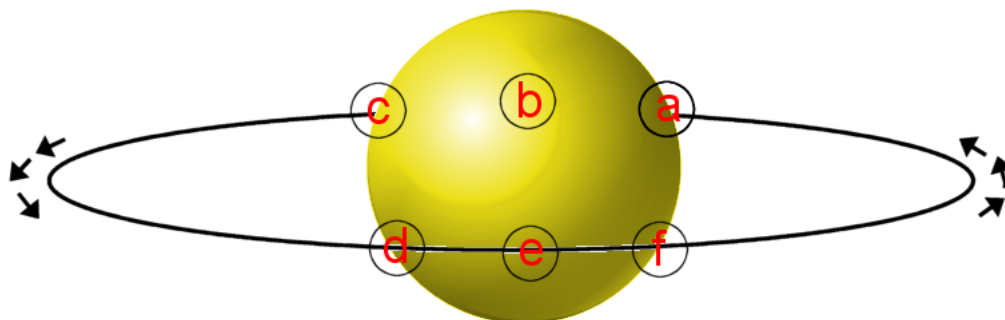
$$f(M) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = (1.0361 \times 10^{-7})(1 - e^2)^{3/2} K_1^3 P [M_\odot]. \quad (1.22)$$

By wyznaczyć wartość masy M_2 w przypadku układu typu SB1 konieczna jest znajomość nachylenia i oraz masy M_1 z innych źródeł.

Wyznaczone masy gwiazd układów podwójnych spełniają znaną relację masa - jasność dla gwiazd ciągu głównego. Rysunek 1.8 przedstawia wykres zależności masy od jasności dla 192 gwiazd układów podwójnych typu SB2 (Svechnikov, 1984).



Rysunek 1.8: Wykres zależności masy od jasności dla 192 gwiazd układów podwójnych typu SB2 (Svechnikov, 1984).



Rysunek 1.9: Układ podwójny zaćmieniowy dla nachylenia orbity $i \approx 90^\circ$. Mniejszy składnik jest gwiazdą cieplejszą. Litery a, b, c, d, e, f oznaczają różne fazy zaćmień.

1.3.2 Wyznaczanie promieni gwiazd

Analiza krzywej zmian blasku układów zaćmieniowych, a w szczególności pomiar czasu trwania zaćmień pozwala na wyznaczenie promieni obu gwiazd.

Zakładając nachylenie $i = 90^\circ$ i mimośród $e \ll 1$ oraz przyjmując oznaczenia t_a jako czas "pierwszego kontaktu" gwiazd, t_b - moment rozpoczęcia zaćmienia (rys. 1.9 i 1.10), a także zakładając, że półoś wielka mniejszej gwiazdy jest stosunkowo duża względem jej promienia (R_s), możemy rozpatrywać ruch gwiazdy obiegającej (mniejszej) jako ruch prostopadły do linii łączącej obserwatora z układem w trakcie trwania zaćmienia.

Otrzymujemy wówczas wartość promienia gwiazdy mniejszej:

$$R_s = \frac{v}{2}(t_b - t_a) \quad (1.23)$$

gdzie v jest sumą amplitud prędkości gwiazd mniejszej (v_s) i większej (v_l), czyli $v = v_s + v_l$.

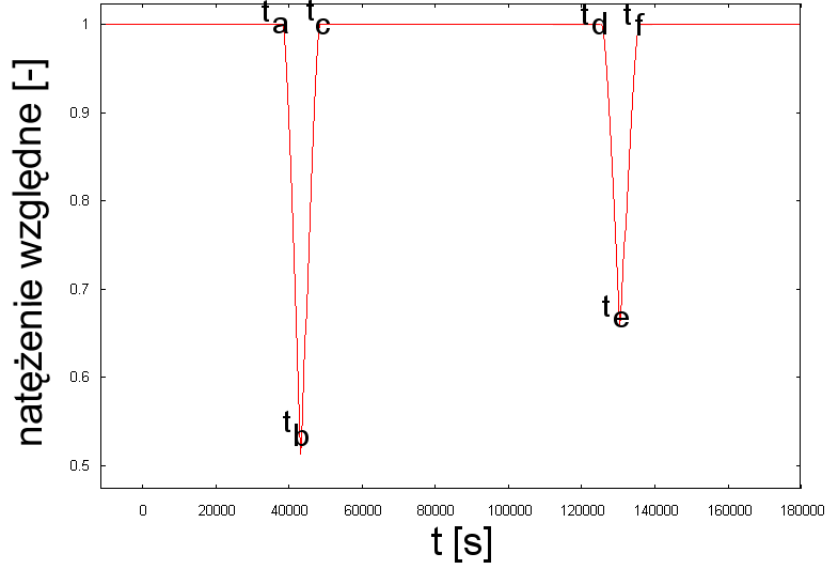
Analogicznie wyznaczamy promień drugiego składnika układu R_l . Zakładając, że t_c jest czasem końca zaćmienia (moment końca minimum), otrzymujemy zależność:

$$R_l = \frac{v}{2}(t_c - t_a) = R_s + \frac{v}{2}(t_c - t_b), \quad (1.24)$$

która bezpośrednio prowadzi do wyznaczenia promienia drugiej gwiazdy.

1.3.3 Wyznaczanie stosunku temperatur efektywnych

Kolejną wielkością, którą możemy wyznaczyć z krzywej zmian blasku układów zaćmieniowych jest stosunek temperatur efektywnych gwiazd. Dzieje się to przy



Rysunek 1.10: Krzywa zmian blasku dla układu przedstawionego na rysunku 1.9. Czasy $t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, t_f$ odpowiadają różnym fazom zaćmień.

założeniu rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego dla obu gwiazd oraz poprzez porównanie ilości światła zarejestrowanej w trakcie zaćmienia oraz gdy oba składniki są w pełni widoczne.

Analiza krzywej zmian blasku prowadzi do sformułowania, że minimum jest głębsze, gdy mniejszy, cieplejszy składnik chowa się za swym towarzyszem. Zgodnie z prawem Stefana - Boltzmanna strumień promieniowania emitowanego przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu jest równy

$$F_r = \sigma T_e^4, \quad (1.25)$$

gdzie σ jest stałą Stefana - Boltzmanna, a T_e oznacza temperaturę efektywną.

Zakładając, że obserwowany strumień promieniowania jest stały wzdłuż całej powierzchni gwiazdy (nie zakładamy pociemnienia brzegowego), strumień promieniowania, który dociera do obserwatora, gdy oba składniki są widoczne wynosi

$$B_0 = k \left(\pi R_l^2 F_{rl} + \pi R_s^2 F_{rs} \right), \quad (1.26)$$

gdzie k oznacza wartość stałą zależną od odległości do układu i własności detektora, R_l i R_s promienie gwiazd większej i mniejszej odpowiednio, a F_{rl} i F_{rs} strumienie promieniowania pochodzące odpowiednio od tych gwiazd. Zaćmienie główne zachodzi, gdy cieplejszy składnik zachodzi za składnik chłodniejszy. Zakładając, że mniejsza z gwiazd jest cieplejsza i strumień promieniowania emitowany z jej powierzchni jest większy, jasność układu w trakcie zaćmienia głównego

jest równa

$$B_p = k\pi R_l^2 F_{rl}, \quad (1.27)$$

a jasność minimum wtórnego wynosi

$$B_s = k\left(\pi R_l^2 - \pi R_s^2\right)F_{rl} + k\pi R_s^2 F_{rs}. \quad (1.28)$$

Dokładne oszacowanie stałej k jest niemożliwe, więc często wyznacza się stosunki jasności. Wykorzystując oznaczenia B_0 (kontinuum LC), B_p (głębokość zaćmienia głównego) i B_s (głębokość zaćmienia wtórnego), mamy

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \frac{F_{rs}}{F_{rl}}, \quad (1.29)$$

lub korzystając z prawa Stefana - Boltzmann (równanie 1.25) otrzymujemy:

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \left(\frac{T_s}{T_l}\right)^4, \quad (1.30)$$

gdzie T_s i T_l to odpowiednio temperatury efektywne składnika mniejszego i większego.

Powyższe rozważania opierają się na wielu uproszczeniach (m.in punktowość mas). W rzeczywistości procedura wyznaczania parametrów jest bardziej złożona i bazuje na uwzględnieniu wielu czynników wpływających na zniekształcenie krzywych LC i RV. Zagadnienie to zostało szerzej umówione w rozdziale czwartym przy opisie metody Wilsona - Devinneya.

1.4 Układy podwójne zaćmieniowe jako test teorii ewolucji gwiazd

Najdokładniejszym testem teorii ewolucji gwiazd i potwierdzeniem słuszności modeli gwiazdowych, jest gwiazda o znanej masie, składzie chemicznym i wieku (jako parametry wstępne) oraz promieniu i temperaturze efektywnej (do porównania z modelem). Jedyną gwiazdą spełniającą wszystkie wymagania jest Słońce. Innym testem słuszności założeń ewolucyjnych są gromady kuliste, które jednak ze względu na czynniki takie jak niepewności w oszacowaniu odległości, tło gwiazdowe, czy nierozdzielne układy podwójne, nie stanowią idealnej próbki.

Bezpośrednie wyznaczenie mas i promieni gwiazd jest możliwe także przy rozpatrywaniu układów podwójnych. Jeśli w układzie nie występuje transfer masy, składniki rozpatrywane są jako pojedyncze gwiazdy, dla których ścieżki ewolucyjne przebiegają oddzielnie. Mogą więc stanowić kolejny test ewolucyjny. Wśród układów podwójnych, dla których można wyznaczyć masy składników prym wiodą gwiazdy zaćmieniowe typu SB2, charakteryzujące się wysoką dokładnością

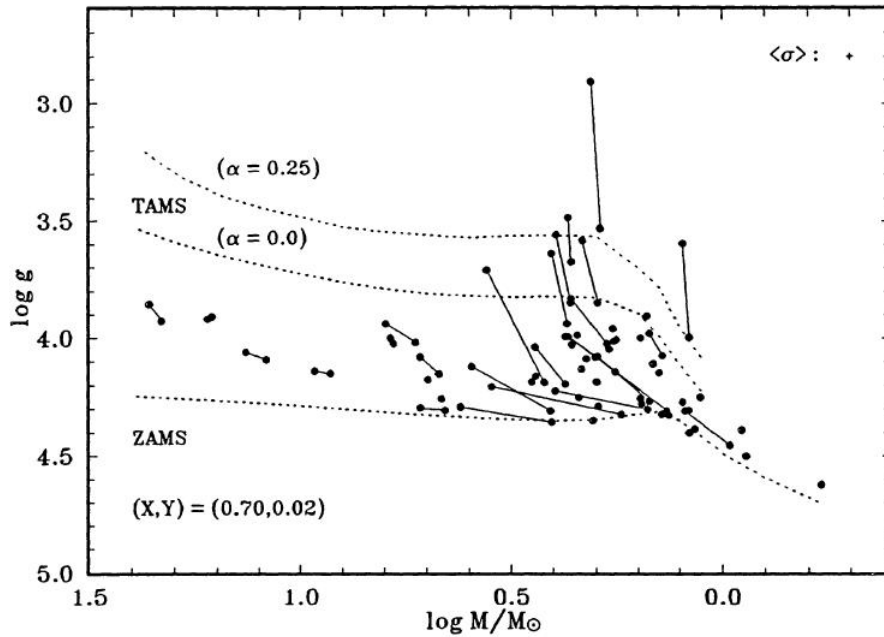
pomiarów mas, promieni i temperatur. Andersen wykazał, że niepewności w wyznaczonych wielkościach nie powinny przekraczać wartości 2% - masa, 1% - promień, 2% - temperatura (Andersen, 1991), by parametry te mogły być użyteczne do testowania modeli ewolucyjnych. Faktycznie, jedynymi układami spełniającymi te kryteria są podwójnie spektroskopowe układy zaćmieniowe SB2. Niejednokrotnie przeprowadzone testy teorii ewolucji gwiazd przy pomocy tych układów (np. Andersen, 1993; Lastennet, 2003) dowodzą, że są one potwierdzeniem praw definiujących przebieg ścieżek ewolucyjnych pojedynczych gwiazd.

Początkowa masa i skład chemiczny gwiazdy określa jej ewolucję. Tworzone na podstawie danych obserwacyjnych (LC i RV) modele ewolucyjne pozwalają nam prześledzić m.in. zmiany promienia i temperatury w czasie. Porównując zatem uzyskane wartości z teorią ewolucji gwiazd, możemy zweryfikować słuszność rozwiązania. W praktyce polega to na wykreśleniu ścieżek ewolucyjnych dla obu składników np. na wykresie $\log g - \log T$ i sprawdzeniu zgodności z otrzymanym modelem.

Andersen (1993) analizując 45 układów podwójnych wykazał, że są one potwierdzeniem teorii ewolucji dla gwiazd ciągu głównego o masach 1-10 M_{\odot} . Biorąc pod uwagę zagadnienie obserwowanej szerokości ciągu głównego wykazał, że tylko parametry fizyczne wyznaczone z wysoką dokładnością (poniżej 2%) dla układów podwójnych mogą być użyteczne do testowania modeli ewolucyjnych. Im mniej parametrów pozostaje wolnych w dopasowaniu danych obserwacyjnych do modeli, tym bardziej prawdopodobna jest słuszność danego testu. Stopień, w jakim podstawowe parametry (masa M i promień R) mogą wpływać na dokładność testów ewolucyjnych reprezentowany jest przez diagram $\log M - \log g$. Rysunek 1.11 przedstawia zależność $\log g$ od $\log M/M_{\odot}$ dla 45 układów Andersena (1993). Wartość g została wyznaczona bezpośrednio ze znajomości wartości mas M i promieni R , niezależnie od niepewności wynikających z użycia paralaksy, czy teorii poszerzenia linii widmowych. Ze średnich niepewności pomiarowych dla poszczególnych punktów wynika, że zmiany ewolucyjne mogą być analizowane z dokładnością ok. $\pm 5\%$ szerokości ciągu głównego.

Zakładając brak utraty masy przez układ, ścieżka ewolucyjna gwiazd ciągu głównego na diagramie $\log M - \log g$ reprezentowana jest przez pionowe przejście tworzące ślad, wzdłuż którego gwiazdy poruszają się od momentu osiągnięcia ZAMS (ang. *Zero Age Main Sequence*) do TAMS (ang. *Terminal Age Main Sequence*), zaznaczonych na wykresie (rys. 1.11) przerywanymi liniami. Linia TAMS jest wyznaczona dla dwóch wartości parametru $\alpha = 0.0$ (modele standardowe, Claret & Gimenez, 1989, 1991a) i $\alpha = 0.25$ (z poprawką na przestrzeliwanie konwektywne *convective core overshooting*). Względna zawartość w jednostce objętości wodoru wynosi $X = 0.7$, a helu $Y = 0.02$.

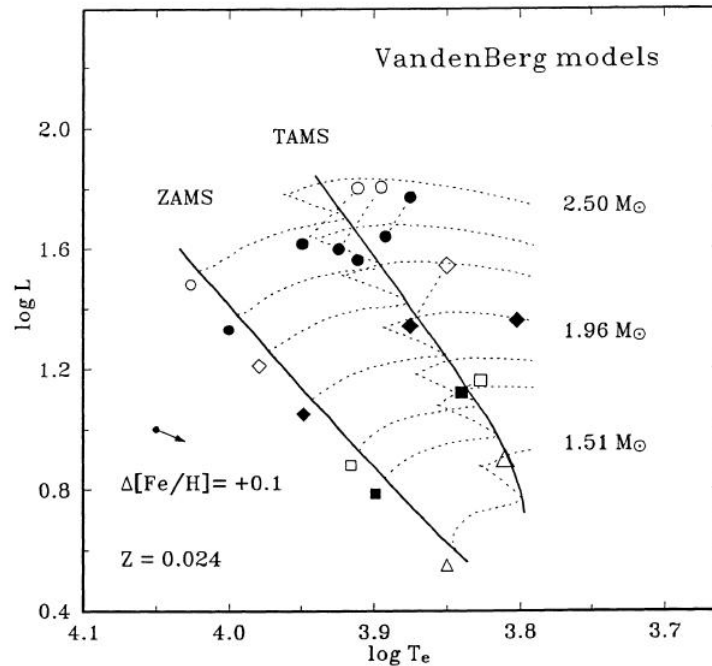
Analiza układów wybranych przez Andersena skupiła się m.in. na problemie niejednoznaczności przy przydzielaniu gwiazd do grup szybkich lub wolnych faz



Rysunek 1.11: Wykres $\log M/M_{\odot}$ - $\log g$ dla składników 45 układów podwójnych (Andersen, 1991). Linie ciągłe łączą składniki układu. Przerwane linie wskazują zależność $\log M/M_{\odot}$ - $\log g$ dla modeli ZAMS i TAMS. Średnia niepewność wyznaczenia położenia punktów znajduje się w prawym górnym rogu wykresu (Andersen, 1993).

ewolucyjnych w rejonie wieku TAMS. Możliwe rozwiązanie problemu daje jedynie właściwe dopasowanie pojedynczych składników układów do obserwowanych mas i odpowiedniego wieku. Poprawność testu ewolucyjnego jest jednak zdeterminowana przez dobór modelu. Rysunek 1.12 przedstawia wykres zależności $\log L$ od $\log T_e$ dla wybranych składników układów podwójnych Andersena (1991) o masach $1.5-2.5 M_{\odot}$ oraz ścieżki ewolucyjne dla obserwowanych mas modeli VandenBerga (1983). Analiza wykresu pokazuje, że dla gwiazd o wysokiej zawartości metali (większa wartość współczynnika α) tylko 3-4 gwiazdy znajdują się poza rejonem ciągu głównego. Dodając 44 znane składniki układów podwójnych, które znajdują się wewnątrz ciągu, a których położenie nie zostało ukazane na wykresie do 13 gwiazd, których położenie na wykresie jest widoczne, stanowi to całkowicie wiarygodny wynik. W większości przypadków obserwujemy zgodność pomiędzy położeniem gwiazd na wykresie ze ścieżkami ewolucyjnymi dla obserwowanych mas. Niemal wszystkie gwiazdy znajdują się na niebieskiej gałęzi (ang. *blue hook*) przerwy Hertzsprunga diagramu HR. Oznacza to, że są w fazie swej szybkiej ewolucji.

Na rysunku 1.13 zostały pokazane położenia tych samych gwiazd w porów-

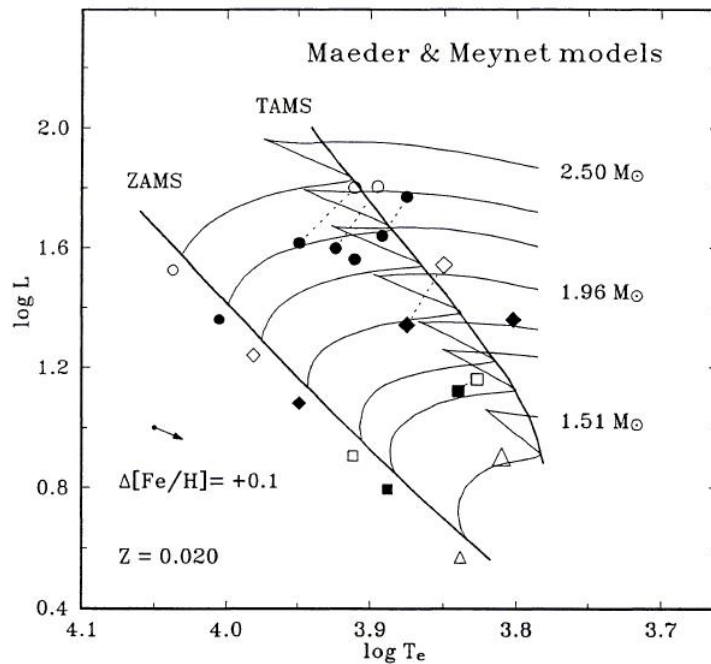


Rysunek 1.12: Wykres zależności $\log L$ od $\log T_e$ dla wybranych składników układów podwójnych Andersena (1991) o masach $1.5\text{--}2.5 M_{\odot}$; $\log g < 3.9$. Ścieżki ewolucyjne standardów dla obserwowanych mas (model Vandenberg), którym odpowiadają odpowiednie symbole zostały zaznaczone liniami przerywanymi. Strzałka wskazuje kierunek, w którym przesuwają się modele przy zmianie Z (Andersen, 1993).

naniu z modelami Maedera i Meyneta (1988) uwzględniającymi przestrzeliwanie konwektywne (*overshooting*) dla gwiazd o metaliczności słonecznej. Nie obserwujemy w tym przypadku odejścia od ciągu głównego dla gwiazd o wysokiej metaliczności. Zauważalna jest także zgodność pomiędzy położeniem gwiazd na wykresie, a ścieżkami ewolucyjnymi dla obserwowanych gwiazd, jednak mniejszy procent z nich jest w fazie szybkiej ewolucji.

Rysunki 1.12 i 1.13 ukazują, jak istotne jest, by wszystkie dostępne informacje były zastosowane w ich pełnym zasięgu (w tym przypadku: dopasowanie odpowiedniego modelu, uwzględnienie przestrzeliwania (*overshooting*)), by test ewolucyjny był wiarygodny.

Te same układy podwójne, wzbogacone o 15 kolejnych, posłużyły Lastennetowi (2002) do przeprowadzenia kolejnych, bardziej wnikliwych testów ścieżek ewolucyjnych. Jego praca stanowi przegląd testowania znanych teorii ewolucyjnych dla różnych układów i opisuje, w jaki sposób znane ścieżki ewolucyjne mogą wyjaśniać własności tychże układów. Lastennet zwraca uwagę, że nawet jeśli dane obserwacyjne pasują do modeli, nie mogą stanowić one ostatecznych testów, gdyż

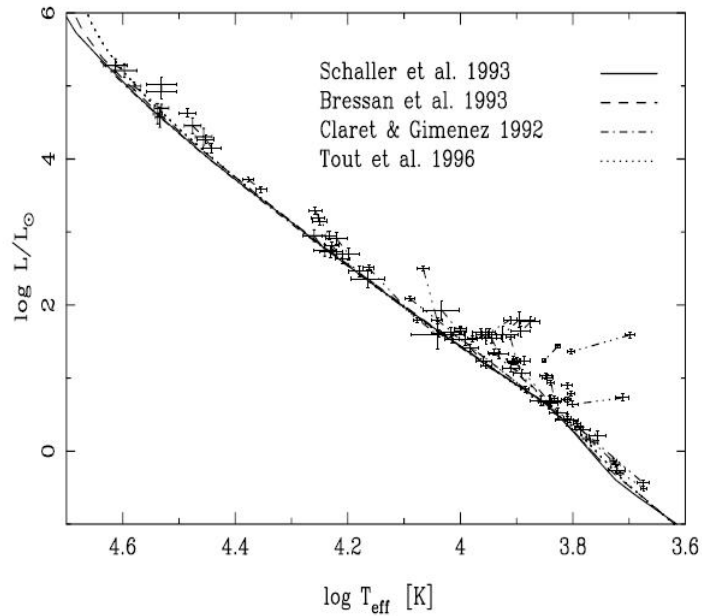


Rysunek 1.13: To co na rys. 1.12 dla modeli Maedera i Meyneta (1988) uwzględniających przestrzeliwanie konwektywne (*overshooting*) dla gwiazd o metaliczności słonecznej (Andersen, 1993).

same modele są zdeterminowane przez wiele czynników (skład chemiczny - parametry Y i Z, parametry konwekcji i przestrzeliwania (*overshooting*)). Dlatego do testowania zostały użyte 3 niezależne zbiory modeli ścieżek ewolucyjnych, z których każdy zależał od innych wartości parametrów: Geneva (Schaller, 1992), Padova (Bressan, 1993) i Granada (Claret & Gimenez, 1992). Rysunek 1.14 ukazuje położenie układów na diagramie HR. Zauważalne jest, że układy w dużej mierze potwierdzają modele ewolucyjne. Warto zauważyć, że czas ZAMS dla różnych modeli przyjmuje inną wartość.

Kolejnym zagadnieniem poruszonym przez Lastenneta był stopień przewidywalności teorii ewolucji gwiazd, czyli odpowiedź na pytanie z jaką dokładnością możemy ze znanych obserwacji, jak temperatura efektywna i jasność, wyznaczyć masy i promienie gwiazd. Dokładność wielkości mierzalnych dla danych układów podwójnych wynosiła 5% dla temperatury efektywnej, 10% dla jasności. Testy potwierdziły słuszność wcześniejszych oszacowań: modele ścieżek ewolucyjnych mogą pomóc w wyznaczeniu wartości mas i promieni z błędem mniejszym niż 8% (Prieto & Lambert, 1999).

Najistotniejszym zagadnieniem poruszonym w przeglądzie Lastenneta (2002) było sprawdzenie hipotezy czy składniki rozpatrywanych układów są tego samego wieku i metaliczności oraz porównanie uzyskanych wieków i metaliczności z



Rysunek 1.14: Diagram HR dla 58 układów podwójnych ze składnikami większymi niż $0.6 M_{\odot}$. Linie ciągłe i przerywane oznaczają różne wartości ZAMS dla $Z=0.02$ (Lastennet, 2002).

wartościami otrzymanymi z dopasowania pojedynczej izochrony do układu. Dla zdecydowanej większości układów uzyskane wyniki były zgodne. Potwierdzona została także duża korelacja między wiekiem a metalicznościami składników układów, co ze względu na fakt, że metaliczność większości układów nie jest znana, zmniejsza wiarygodność testu.

Zagadnienie ścieżek ewolucyjnych i dopasowywania izochron do układu zostanie szerzej umówione w rozdziale drugim.

Rozdział 2

Ścieżki ewolucyjne i izochrony

2.1 Wprowadzenie

Układy podwójne mogą posłużyć do testowania teorii ewolucji gwiazd. Wyznaczony z obserwacji na podstawie zadanej metody zestaw parametrów układu można zweryfikować porównując z modelem - danymi teoretycznymi wygenerowanymi dla zadanej masy gwiazdy. Test polega na wyznaczeniu spójności rozważanego zestawu parametrów i założeń teoretycznych. Jeśli jest ona wysoka (wyniki są zgodne w granicy błędów) oznacza to, że wyznaczone składniki układu leżą na ścieżkach ewolucyjnych odpowiadającym swoim masom. Potwierdzeniem teorii ewolucji jest wygenerowanie izochron i sprawdzenie, czy obie gwiazdy leżą na tej samej, czyli zweryfikowanie czy składniki układu są równego wieku. Teoria zakłada, że tak właśnie powinno się stać.

Rozdział zawiera opis teoretyczny procesu ewolucji gwiazd oraz procedur tworzenia ścieżek ewolucyjnych i izochron na przykładzie dwóch publikacji: Bertelli (2008) oraz Yi et al. (2001).

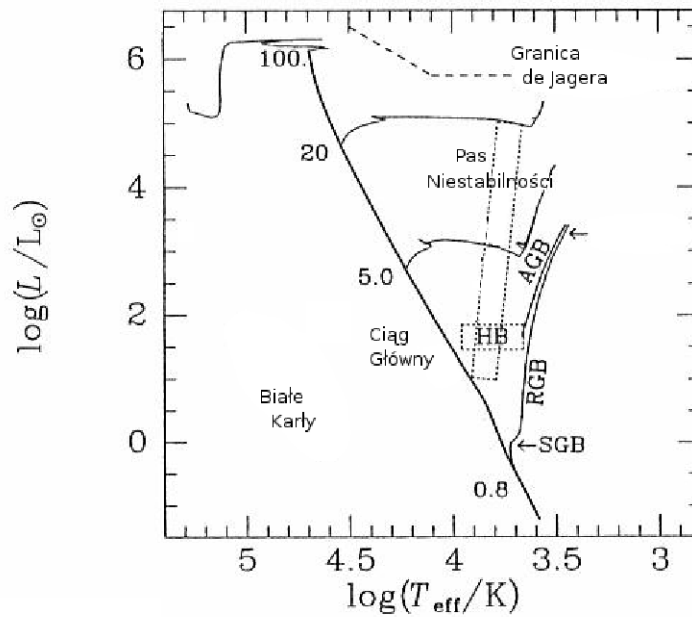
2.2 Ewolucja gwiazd

Bliskość gwiazd w układach podwójnych w porównaniu z typowymi dużymi odległościami międzygwiazdowymi sugeruje wspólne powstanie obu składników. Następuje to na skutek rozerwania kurczącego się obłoku protogwiazdowego ze względu na nadmiar momentu pędu. Obserwowane składniki układów podwójnych są więc tego samego wieku.

Związane ze sobą grawitacyjnie składniki ewoluują wspólnie, jednak każdy z nich rozwija się zależnie od swej początkowej masy i składu chemicznego. Dzięki znajomości mas i promieni każdej z gwiazd w przypadku układów podwójnych

zaćmieniowych można prześledzić ścieżkę ewolucyjną każdego ze składników z osobna.

Własności gwiazd wygodnie jest rozważać osadzając obiekty na diagramie Hertzsprunga - Russella (HR), który przedstawia m. in. zależność mocy promieniowania L gwiazd od ich temperatury efektywnej T_e . Większość gwiazd na wykresie zajmuje położenie w diagonalnym pasie zwanym ciągiem głównym (rysunek 2.1).



Rysunek 2.1: Obszary koncentracji gwiazd na diagramie HR (na podstawie Binney & Merrifield, 1998). Symbolika wyjaśniona w tekście.

Gwiazda powstaje z obłoku pyłu i gazu, który zaczyna się zagęszczać. Stopniowe zagęszczenie powoduje wzrost jego samograwitacji, czego następstwem jest kolaps (zapadnięcie się). Kolapsujący obłok fragmentuje na mniejsze, których temperatura rośnie. Obłoki o odpowiedniej masie mogą wytworzyć gwiazdę, która w początkowym stadium przyjmuje postać protogwiazdy. Przy odpowiedniej masie i wystarczającej temperaturze następuje zapłon reakcji syntezy jądrowej, który uważa się za właściwy moment narodzin gwiazdy.

Samograwitacja obiektów gazowych o masie mniejszej niż $0.08 M_{\odot}$ nie wystarcza do ściśnięcia centralnych obszarów obiektu tak, by temperatura była dostatecznie wysoka dla zapoczątkowania reakcji syntezy wodoru. Obiekty te nie mogą więc świecić światłem będącym ich efektem. Nazywane brązowymi karłami umierają wolno ochładzając się (wypromieniowując energię) w ciągu setek

milionów lat.

Gwiazdy o masach większych niż $0.08 M_{\odot}$ zwiększają swoją temperaturę i wchodzi na ciąg główny, gdzie rozpoczynają reakcje przemiany wodoru w hel. Moment wejścia gwiazdy na ciąg główny nazywamy ZAMS (*Zero Age Main Sequence*), zejścia - TAMS (*Terminal Age Main Sequence*). Pobyt gwiazdy na ciągu głównym to najdłuższa faza jej życia.

Gwiazdy ciągu głównego są jednorodne chemicznie. Spalają w jądrach wodor, produkując w ten sposób hel. Zasadniczą własnością wpływającą na czas przebywania gwiazdy na ciągu głównym jest jej masa. Gwiazdy o dużej masie wyświecają energię w znacznie wyższym tempie niż gwiazdy o masie mniejszej, zatem ewoluują szybciej. Ewolucja gwiazdy, gdy zużyje ona już cały zapas wodoru w jądrze (zejście z ciągu głównego) także zależy od masy. Schemat jest jednak taki sam: gwiazda próbuje pokonać samograwitację i niepowstrzymany wpływ ciepła na zewnątrz, co prowadzi do wyczerpywania się kolejnych porcji paliwa jądrowego.

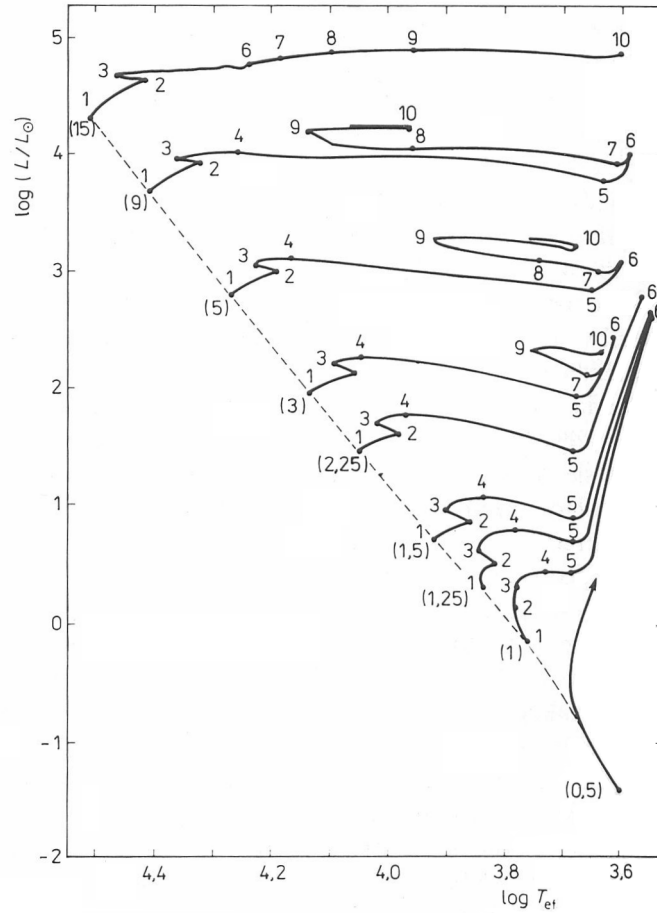
Gwiazdy typu Słońca po ok. 7 mld lat po ZAMS przechodzą w fazę podolbrzymów (SGB, Sub Giant Branch, patrz rys. 2.1), w której zachodzące dotąd w jądrze reakcje jądrowe przenoszą się do otaczającej je warstwy palenia. Dla mas większych niż $1 M_{\odot}$ po wypaleniu wodoru w centrum następuje kontrakcja i przebudowa. Gwiazda przesuwana się na prawo na wykresie jasność - temperatura (HR), osiągając fazę czerwonych olbrzymów (RGB, Red Giant Branch, patrz rys. 2.1). W tej części ewolucji wodor spalany jest w otoczce helowego jądra. Dla gwiazd mniejszych niż $2 M_{\odot}$ faza RGB kończy się błyskiem helowym - zapłonem reakcji w helowym jądrze. W kolejnych fazach następuje palenie helu, początkowo w jądrze, a następnie w warstwach wokół niego. Zaczyna się tworzyć jądro węglowe. Gwiazdy o masie mniejszej niż $8 M_{\odot}$ kończą swą ewolucję na asymptotycznej gałęzi olbrzymów (AGB, Asymptotic Giant Branch, patrz rys. 2.1).

2.3 Ścieżki ewolucyjne

Ewolucja gwiazdy zależy od jej początkowej masy. To ona determinuje czas przebywania na ciągu głównym i rozwój obiektu w późniejszych fazach. Analizując położenie gwiazdy na diagramie HR możemy wykreślić jej ścieżkę ewolucyjną (ang. *evolutionary track*). Przykładowe ścieżki dla obiektów o różnych masach przedstawia rysunek 2.2.

Podstawowe etapy ewolucji (opis przebiegu ścieżek ewolucyjnych) zostały przedstawione w tabeli 2.1.

Kolejnym czynnikiem wpływającym na przebieg ścieżki ewolucyjnej gwiazdy jest jej skład chemiczny. Charakteryzowany jest on parametrem Z , który oznacza procentowy udział w masie gwiazdy metali (pierwiastków różnych od wodoru i



Rysunek 2.2: Diagram HR dla gwiazd o masach 0.5 - 15 M_{\odot} (Kubiak, 1994). Masy gwiazd podane w nawiasach.

helu), zwanym metalicznością. Spełniona jest relacja:

$$X + Y + Z = 1, \quad (2.1)$$

gdzie X oznacza procentową zawartość wodoru w masie obiektu, a Y - procentową zawartość helu. Dla Słońca wartość parametru Z wynosi 0.018.

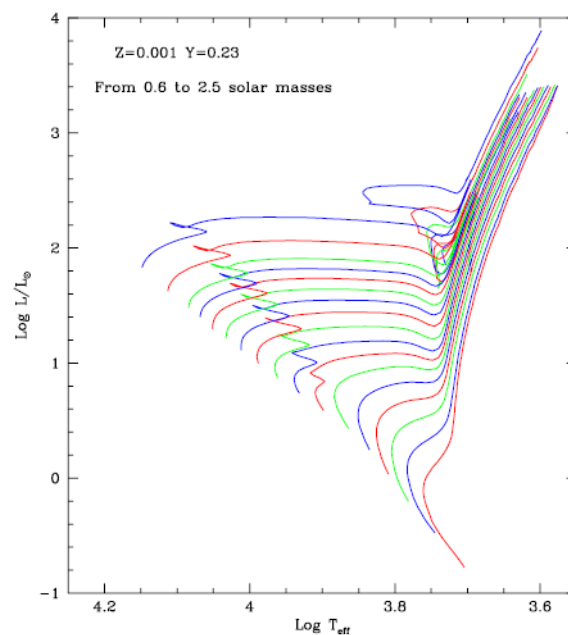
Różnice w przebiegach ścieżek ewolucyjnych dla różnych metaliczności i faz ewolucji są przedmiotem badań i symulacji. Ze względu na różnice pomiędzy rzeczywistą zawartością helu i metali w gwiazdach a wartościami parametrów Y i Z generowanymi przez obliczenia, Bertelli (2008)¹ dokonał dokładnej analizy przebiegu ścieżek uwzględniając generowanie wyników wzdłuż całej długości gałęzi AGB. Niektóre wyniki symulacji przeprowadzonych dla szerokiego zakresu war-

¹generator ścieżek ewolucyjnych i izochron dostępny pod adresem: <http://stev.oapd.inaf.it/cgi-bin/cmd>

1	ciąg główny wieku ZAMS
1-2	ciąg główny
2	zejście z ciągu głównego (TAMS)
2-3	przebudowa
3	wytworzenie warstwy gorącego H wokół jądra He
3-4	spalanie H wokół jądra He
4-5	spadek temperatury, wzrost promienia
5-6	gałąź czerwonych olbrzymów (RGB)
6	błysk helowy
6-8	kontrakcja, zanik konwekcji w zewn. warstwach
8-10	spalanie He, wzrost promienia

Tabela 2.1: Wyjaśnienie oznaczeń znajdujących się na rysunku 2.2.

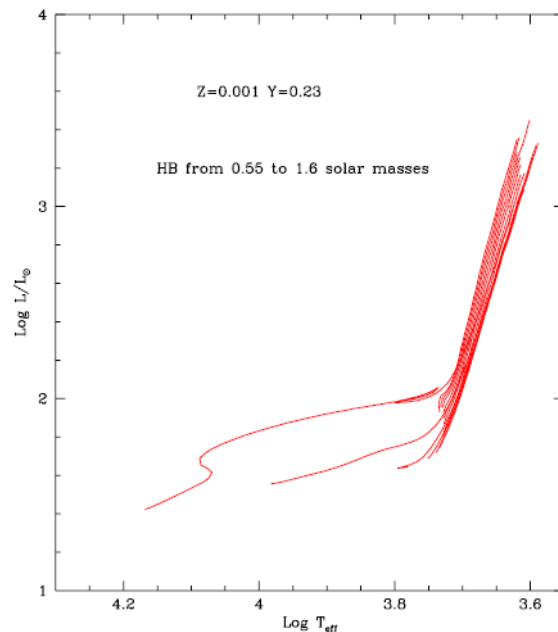
tości Y (0.23 - 0.46) i Z (0.0001 - 0.070) i mas ($0.15 - 20 M_{\odot}$) są przedstawione na wykresach 2.3, 2.5, 2.4 i 2.6.



Rysunek 2.3: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ dla mas $0.6 - 2.5 M_{\odot}$ obejmujące fazy ewolucji od ZAMS do RGB (małe masy) lub AGB ($M < 2.5 M_{\odot}$) (Bertelli, 2008).

Wpływ metaliczności (wartość parametrów Y i Z) na przebieg ścieżek dla tych samych mas i faz ewolucji przedstawiają wykresy 2.7 i 2.8.

Uzyskane na podstawie analizy danych fotometrycznych i spektroskopowych parametry układu zawierają informację o wielkościach pozwalających umieścić

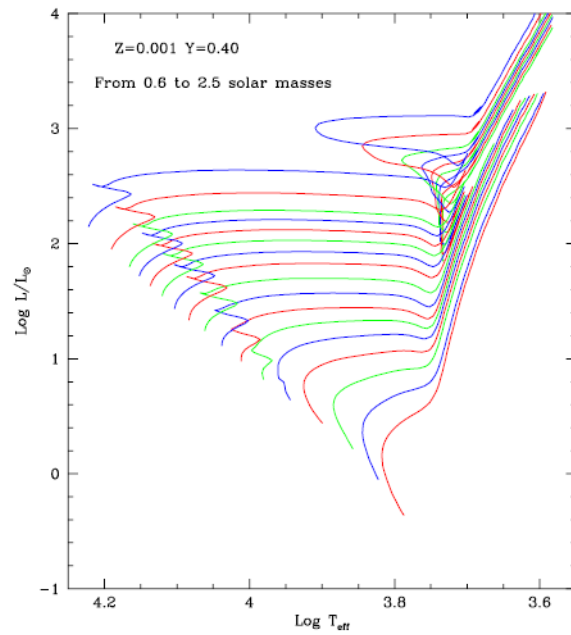


Rysunek 2.4: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ dla mas $0.55 - 1.6 M_{\odot}$ obejmujące fazy ewolucji od ZAHB (pas niestabilności) do AGB (Bertelli, 2008).

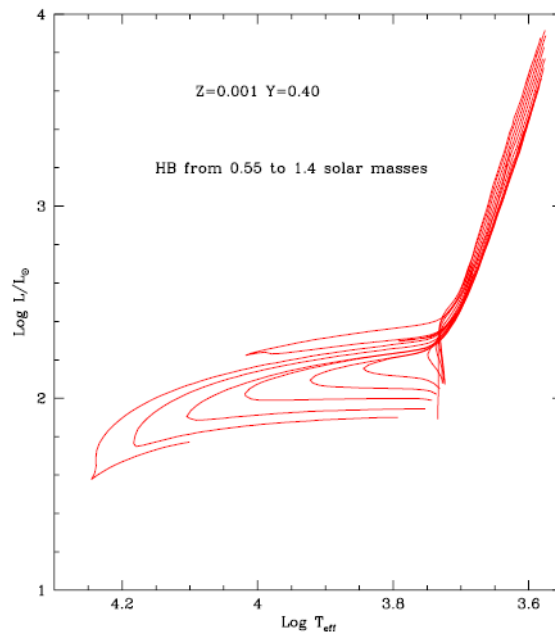
gwiazdy na diagramie HR. Dla znanej masy składników oszacowanej na podstawie modelowania możemy wygenerować teoretyczne ścieżki ewolucyjne, a następnie sprawdzić spójność rozwiązania poprzez porównanie położenia składników układu i ich ścieżek na diagramie. Spójność rozwiązania z teorią występuje, jeśli leży ono w granicach błędu na krzywej.

2.4 Izochrony

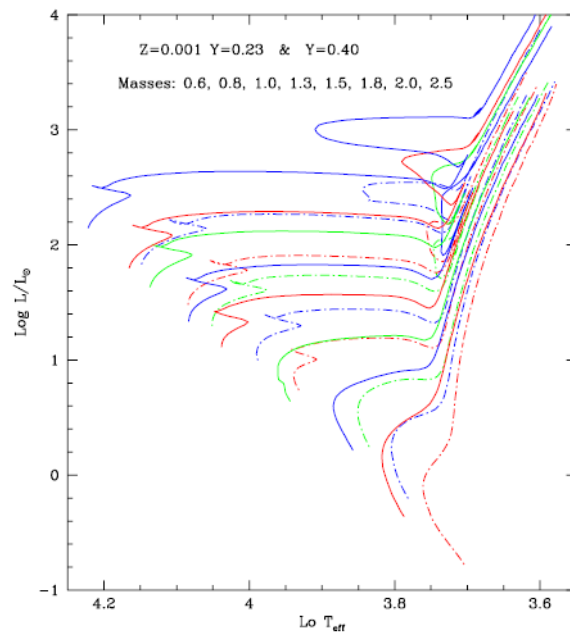
Testem teorii ewolucji gwiazd w przypadku układów podwójnych jest sprawdzenie czy oba składniki są takiego samego wieku. By się o tym przekonać należy wygenerować sieć izochron (linii łączących punkty o tym samym wieku), umieścić je na diagramie HR po wcześniejszym umieszczeniu na nim wartości odpowiadających wyznaczonym parametrom gwiazd i sprawdzić, czy składniki układu leżą na wspólnej linii. Dodatkowo, gdy składniki znajdują się na jednej izochronie, możemy oszacować wiek układu (dana linia odpowiada konkretnej wartości).



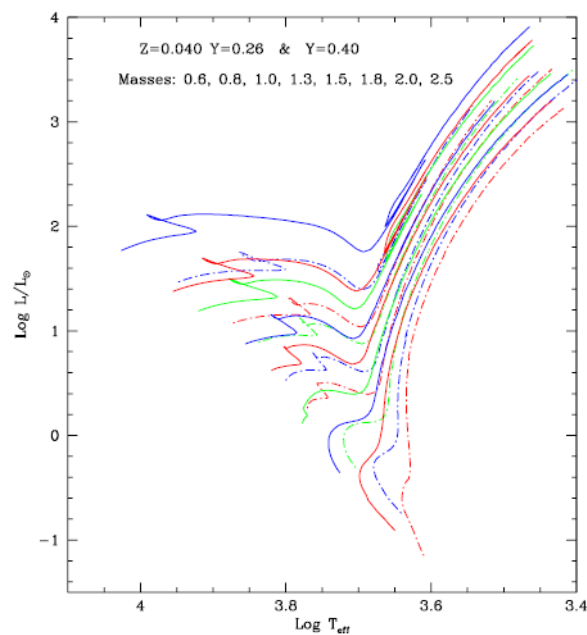
Rysunek 2.5: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.40$ dla mas $0.6 - 2.5 M_{\odot}$ obejmujące fazy ewolucji od ZAMS do RGB (małe masy) lub AGB ($M < 2.5 M_{\odot}$) (Bertelli, 2008).



Rysunek 2.6: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.40$ dla mas $0.55 - 1.6 M_{\odot}$ obejmujące fazy ewolucji od ZAHB (pas niestabilności) do AGB (Bertelli, 2008).



Rysunek 2.7: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ (linia przerywana) oraz $Y=0.40$ (linia ciągła) dla mas 0.6, 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5 M_{\odot} (Bertelli, 2008).



Rysunek 2.8: Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.040$ i helu $Y=0.26$ (linia przerywana) oraz $Y=0.40$ (linia ciągła) dla mas 0.6, 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5 M_{\odot} (Bertelli, 2008).

2.4.1 Przegląd

Wyróżniamy 2 populacje izochron (Yi et al., 2001). Pierwsza z nich (starsza, aktualnie nieużywana) uwzględnia odejście od ciągu głównego (*main-sequence turnoff*, MSTO) gwiazd słabszych i bardziej czerwonych (większa wartość wskaźnika barwy B-V) (Demarque & Larson, 1964), druga - dochodzi w swym zasięgu do gałęzi czerwonych olbrzymów (RGB) dopasowując się do większej ilości danych obserwacyjnych (Iben 1974, Demarque & McClure, 1977). Nowsza metoda generowania izochron umożliwia m.in. budowanie modeli gromad i galaktyk dla ich początkowych funkcji mas. Technika ta, zwana *evolutionary population synthesis* (EPS), zainicjowana przez Tinsleya (1980), doczekała się wielu modyfikacji i zastosowań (Gunn, Stryker & Tinsley, 1981; Bruzual, 1983; Pickles, 1985).

2.4.2 Izochrony Y^2

Sieć izochron wymaga aktualizacji przy każdej modyfikacji danych fizycznych, będących podstawą jej generowania. Jedną z grup zajmującą się tym zagadnieniem jest grupa Yale (np. Green, Demarque & King, 1987). Do niedawna obowiązująca siatka izochron stworzona przez tę grupę - RYI (*Revised Yale Isochrones*) doczekała się modyfikacji. We współpracy Yale z grupą Yonsei (Yi et al., 2001) powstał zbiór izochron - Y^2 pokrywający szeroki zakres metaliczności i wieku obiektów ². Modyfikacja w zakładanych wiekach polega na uwzględnianiu etapu, gdy obiekt znajduje się przed ciągiem głównym (*pre-main-sequence*), a nie (jak do tej pory) na wyznaczaniu jego starości od momentu wejścia na ciąg (ZAMS). Jest to pomocne przy tworzeniu modeli dla młodych obiektów (także młodych gromad otwartych). Izochrony Y^2 zostały wygenerowane przy uwzględnieniu poprawionych wartości nieprzeźroczystości, równań stanu, dyfuzji helu oraz przestrzeliwania konwektywnego (ang. *convective core overshooting*). Poprawka w wieku dla przypadku gromad kulistych Galaktyki spowodowana wyżej wymienionymi modyfikacjami w porównaniu z izochronami RYI wynosi ok. 15%.

Fizyka mikroskopowa i parametry wejściowe

W metodzie tworzenia izochron Y^2 zostały wykorzystane zmodyfikowane tabele nieprzeźroczystości OPAL (Rogers & Iglesias, 1995; Iglesias & Rogers, 1996). Użyty zakres temperatury to $\log T \geq 4.1$. Dla temperatur zakresu $\log T \leq 3.75$ użyto nieprzeźroczystości autorstwa Alexander & Ferguson (1994). W zakresie $3.75 < \log T < 4.1$ użyto interpolowanych wartości pomiędzy wartościami z tych dwóch tabel.

Równania stanu zostały zaczerpnięte z OPAL EOS (Rogers et al., 1996).

Uwzględnienie dyfuzji helu znalazło odzwierciedlenie w zastosowaniu formuły Loeba (Thoul, Bahcall & Loeb, 1994).

²generator izochron dostępny pod adresem: <http://www.astro.yale.edu/demarque/yyiso.html>

Użyte modele gwiazdowe były skalowane względem Słońca (Grevesse & Noels, 1993).

Skład chemiczny

Początkowe wartości parametrów Y i Z określających skład chemiczny gwiazd zostały przyjęte jako $(Y, Z)_0 = (0.23, 0.00)$. Wartości odpowiadające przyjętemu modelowi Słońca wynoszą $(Y, Z)_\odot = (0.267, 0.018)$. Odpowiada to stosunkowi:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta Z} \approx 2.0 \quad (2.2)$$

oraz zależności

$$Y = 0.23 + 2Z. \quad (2.3)$$

Przestrzeliwanie konwektywne (convective core overshooting)

Konwekcja w jądrze gwiazdy musi uwzględniać przestrzeliwanie (ang. *overshooting*, OS) komórek konwekcyjnych poza klasyczną granicę jądra, określoną kryterium Schwarzschilda. Ma to zasadniczy wpływ na przebieg transferu ciepła i wartość temperatury wnętrza gwiazdy. Ścisła zależność procesu modelowania gwiazd od tego zjawiska pogłębiła studia nad tym zagadnieniem (Shaviv & Salpeter, 1973; Eggleton, 1983; Renzini, 1987). Teoria nie daje możliwości dokładnego oszacowania ilości konwektywnych przestrzałów, więc uwzględnianie tego czynnika musi odwoływać się do sparametryzowanych wartości. Jednym z nich jest stosunek odległości przestrzału i lokalnej wysokości skali ciśnienia $\frac{d}{H_p}$, definiujący wartość OS.

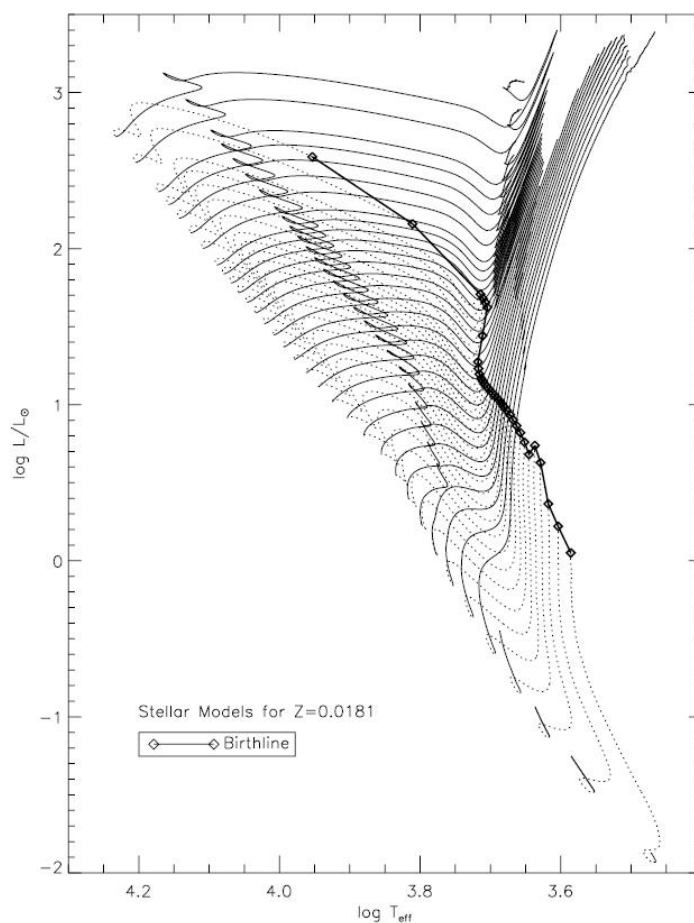
Dla izochron Y^2 zostały przyjęte wartości OS = 0.2 dla młodych izochron (wiek ≤ 2 mld lat) oraz OS = 0.0 dla starszych (wiek ≥ 3 mld lat).

Tabele transformacji (color transformation tables)

Własności teoretyczne gwiazd (np. L , T_e) zostały przekształcone do skali obserwowanych wskaźników barwy i jasności przy użyciu uaktualnionych tabel transformacji (ang. *color transformation table*) LCB (Lejeune, Cuisiner & Buser, 1998) oraz w niektórych przypadkach - GDK (Green et al., 1987; tabele użyte w izochronach RYI). W procesie przyrównania izochron do wyników obserwacji użycie odpowiednich tabel transformacji jest równie istotne jak zastosowanie poprawnych wartości wejściowych parametrów fizycznych przy tworzeniu modeli gwiazd.

Ścieżki ewolucyjne Y^2

W celu wygenerowania ścieżek ewolucyjnych dla izochron Y^2 został zastosowany Yale Stellar Evolution Code (YSEC), uwzględniający fazę ewolucji przed wejściem na ciąg główny (*pre-main-sequence*).

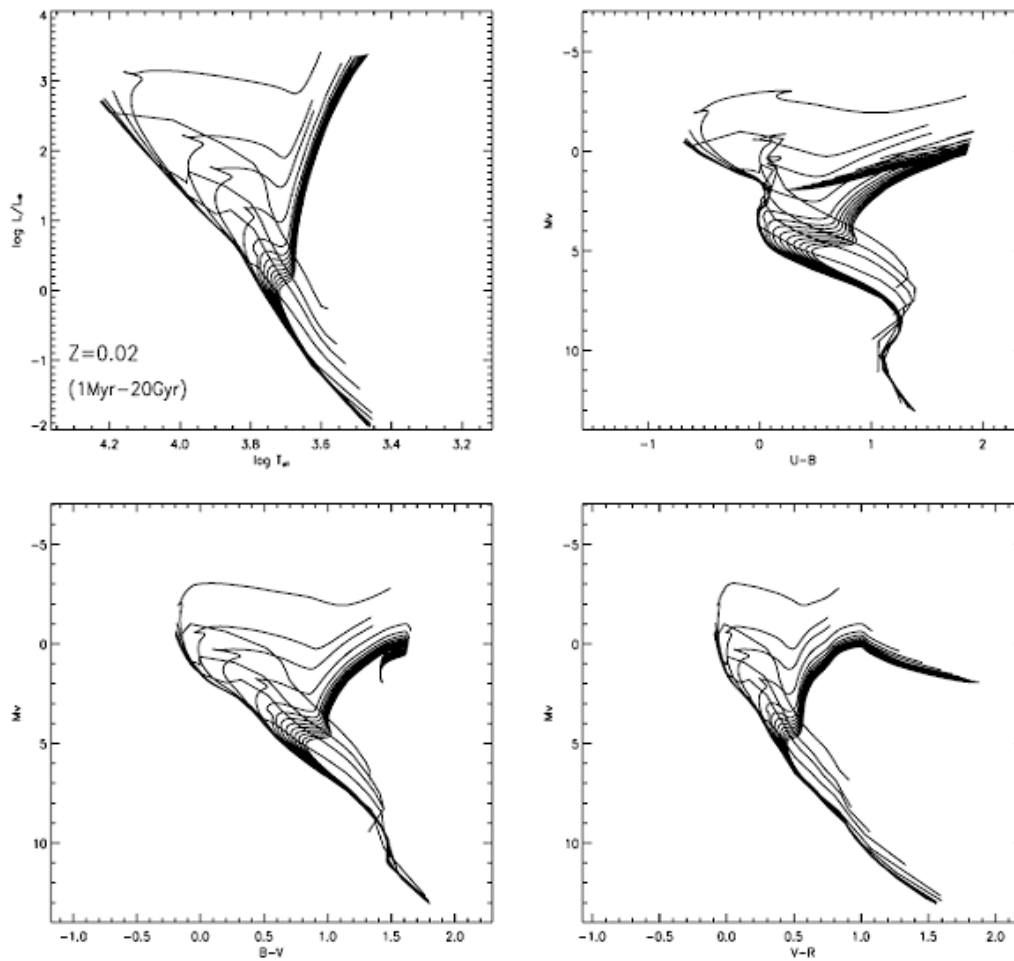


Rysunek 2.9: Ścieżki ewolucyjne dla mas $0.4-5.0 M_{\odot}$ obejmujące fazy ewolucji przed wejściem na ciąg główny (linia przerywana) po gałąź czerwonych olbrzymów (RGB); wygenerowane na podstawie kodu YSEC (Yi et al., 2001).

Rysunek 2.9 przedstawia wykres ścieżek ewolucyjnych wygenerowanych na podstawie YSEC dla składu chemicznego Słońca i mas $0.4 - 5.0 M_{\odot}$. Linia łącząca symbole w kształcie rombów odpowiada narodzinom gwiazd o takim składzie i masie.

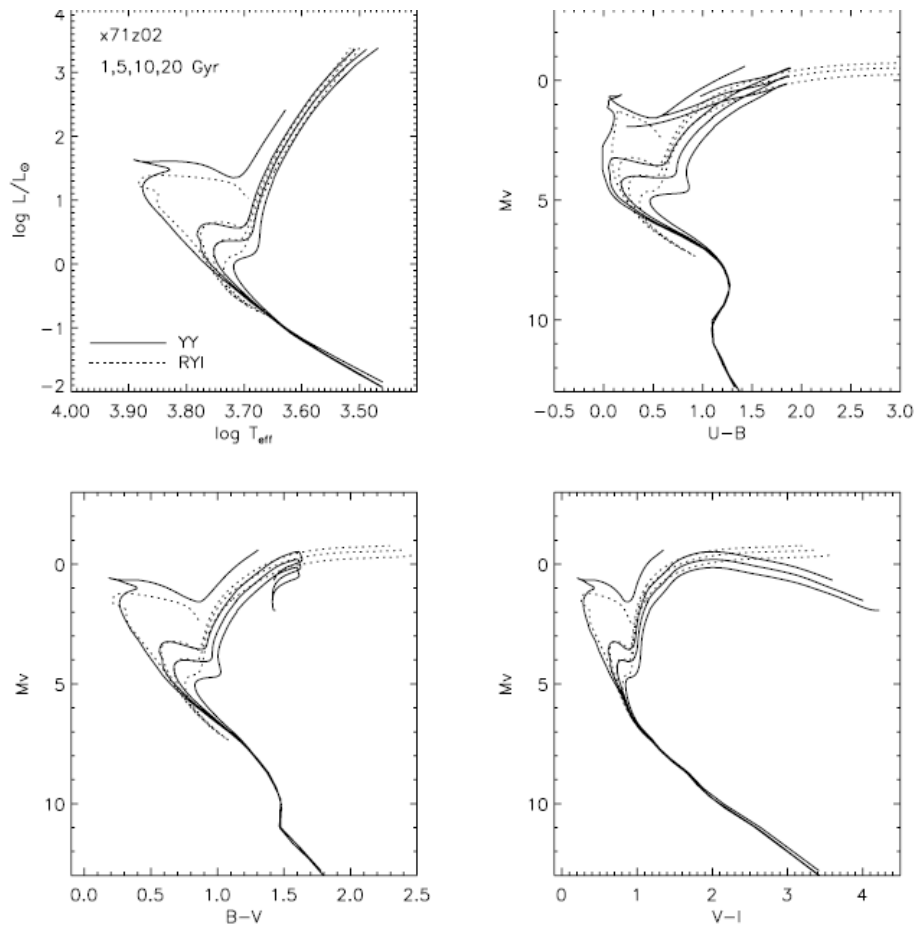
2.4.3 Izochrony Y^2 w praktyce

Grupy Yale i Yonsei (Yi et al., 2001) zmodyfikowały obowiązującą siatkę izochron RYI tworząc zbiór Y^2 . Przykładowe izochrony dla wieku 1 mln - 20 mld lat i metaliczności $Z=0.02$ przedstawione są na rysunku 2.10. Młode izochrony (1, 2, 4, 8, 10, 20, 40, 60, 80 mln lat) reprezentują fazy ewolucji przed ciągiem głównym. Rysunek 2.11 ukazuje porównanie przebiegu izochron RYI (linia przerywana) i Y^2 (linia ciągła). Lewy górny wykres przedstawia różnicę ich przebiegu na teo-



Rysunek 2.10: Isochrony Y^2 dla wieku 1 mln - 20 mld lat i metaliczności $Z=0.02$ (Yi et al., 2001).

retycznym diagramie HR spowodowaną przyjęciem innych modeli gwiazdowych. Trzy pozostałe wykresy ukazują efekt użycia w izochronach Y^2 zaktualizowanych tabel transformacji (ang. *color transformation tables*) - LCB.



Rysunek 2.11: Porównanie przebiegu izochron Y^2 (linia ciągła) i RYI (linia przerywana) dla wieku = 1, 5, 10, 20 mld lat i metaliczności $Z=0.02$ (Yi et al., 2001).

Rozdział 3

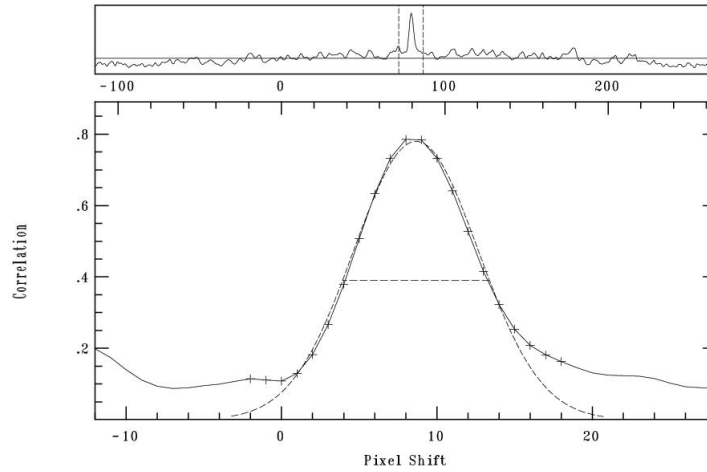
Metoda korelacji krzyżowej

3.1 Wstęp

Metoda korelacji krzyżowej (ang. *cross correlation*) jest jedną z metod wykorzystywanych do mierzenia dopplerowskich przesunięć linii w widmach gwiazd i wyznaczania ich prędkości radialnych. Technika zastosowana ponad 30 lat temu (Simkin, 1974), rozwijana przez lata (np. Tonry & Davis, 1979) wciąż wydaje się być najwłaściwszą metodą wyznaczania prędkości radialnych. Nowe algorytmy (m.in. korelacja dwuwymiarowa TODCOR, Zucker & Mazeh, 1994) pozwalają na zwiększenie precyzji pomiarów przesunięcia i prędkości, co ma wpływ nie tylko na wzrost informacji na temat układów podwójnych i wielokrotnych gwiazd, ale także na możliwości detekcji planet pozasłonecznych (np. Mayor & Queloz, 1995).

3.2 Korelacja jednowymiarowa

Główną ideą metody korelacji krzyżowej jest porównanie widma obserwowanego z widmem odniesienia oraz wyznaczenie względnego przesunięcia ich linii widmowych poprzez znalezienie maksimum funkcji korelacji. W praktyce oznacza to "przesuwanie" widma obserwowanego względem widma odniesienia i wyznaczanie wartości funkcji korelacji krzyżowej (ang. *Cross Correlation Function, CCF*). W efekcie uzyskujemy wykres, jak na rysunku 3.1, przedstawiającym CCF jako funkcję przesunięcia (prędkości radialnej). Maksimum funkcji, zwane także pikiem korelacji, występuje w punkcie odpowiadającym względnemu przesunięciu obu widm także w skali prędkości radialnych. Technika pozwala na wyznaczenie dokładnych prędkości radialnych nawet dla widm o bardzo niskim stosunku sygnału do szumu.



Rysunek 3.1: Przebieg funkcji korelacji krzyżowej (CCF). Maksimum funkcji występuje w punkcie odpowiadającym wartości przesunięcia obu widm w skali prędkości radialnych (górna oś) i numeru piksela (dolna oś). Wykres powstał w wyniku wykorzystania funkcji `fxcor` wyznaczającej jednowymiarową CCF w IRAFie.

3.2.1 Algorytm korelacji jednowymiarowej

Niech $f(n)$ będzie widmem obserwowanym, którego przesunięcie chcemy wyznaczyć. Oznaczmy jako $g(n)$ widmo porównania, którego przesunięcie linii widmowych wynosi z założenia zero oraz podzielmy oba widma na N części, oznaczonych indeksami n . Związek między n a długością fali λ (Tonry & Davis, 1979) wynosi:

$$n = A \ln \lambda + B. \quad (3.1)$$

Oznaczmy jako $F(k)$ i $G(k)$ transformaty Fouriera zdefiniowane jako

$$F(k) = \sum_n f(n) \exp(-2\pi ink/N). \quad (3.2)$$

W dalszym opisie zapis \sum_n będzie oznaczał sumowanie po wartościach 0 - (N-1). Niech σ_f oraz σ_g oznaczają średnią kwadratową (ang. *Root Mean Square, RMS*):

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \sum_n f(n)^2. \quad (3.3)$$

Znormalizowaną funkcję korelacji krzyżowej możemy przedstawić jako:

$$c(n) \equiv (f \times g)(n) = \frac{1}{N\sigma_f\sigma_g} \sum_m f(m)g(m-n). \quad (3.4)$$

Po zastosowaniu transformacji fourierowskiej, otrzymujemy:

$$C(k) = \frac{1}{N\sigma_f\sigma_g} F(k)G^*(k), \quad (3.5)$$

gdzie $G(k)^*$ oznacza liczbę sprzężoną do $G(k)$.

3.2.2 Oszacowanie rozrzutu rozkładu przesunięcia i prędkości

Przyjmijmy, że $f(n)$ jest wielokrotnością $g(n)$ przesuniętą o δ i splecioną z symetryczną funkcją $b(n)$ (Tonry & Davis, 1979):

$$f(n) \cong \gamma g * b(n - \delta), \quad (3.6)$$

gdzie $*$ oznacza splot funkcji. Aby uzyskać wartości parametrów γ i δ należy zminimalizować wyrażenie:

$$\chi^2(\gamma, \delta; b) = \sum_n [\gamma g * b(n - \delta) - f(n)]^2. \quad (3.7)$$

Równanie (3.7) przedstawione w przestrzeni Fouriera przyjmuje postać

$$\chi^2(\gamma, \delta; b) = \sum_k \left[\gamma G(k) B(k) \exp\left(-\frac{2\pi i k \delta}{N}\right) - F(k) \right]^2. \quad (3.8)$$

Zapiszmy χ^2 jako

$$\chi^2(\gamma, \delta; b) = \gamma^2 \sum g * b(n - \delta)^2 - 2\gamma \sum g * b(n - \delta) f(n) + \sum f(n)^2. \quad (3.9)$$

Przyjmując

$$\sigma_{g*b}^2 = \frac{1}{N} \sum (g * b)^2, \quad (3.10)$$

możemy zapisać:

$$\chi^2(\gamma, \delta; b) = \gamma^2 N \sigma_{g*b}^2 - 2\gamma N \sigma_f \sigma_g c * b(\delta) + N \sigma_f^2. \quad (3.11)$$

Minimalizacja χ^2 w odniesieniu do γ daje wynik:

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial \gamma} = 2N [\gamma \sigma_{g*b}^2 - \sigma_f \sigma_g c * b(\delta)], \quad (3.12)$$

$$\gamma_{min} = \frac{\sigma_f \sigma_g}{\sigma_{g*b}^2} c * b(\delta). \quad (3.13)$$

Podstawiając tę wartość otrzymujemy:

$$\chi^2(\gamma_{min}, \delta; b) = N \sigma_f^2 \left(1 - \frac{\sigma_g^2}{\sigma_{g*b}^2} [c * b(\delta)]^2 \right). \quad (3.14)$$

Minimalizacja χ^2 jest zatem równoważna maksymalizacji

$$\frac{1}{\sigma_{g*b}} c * b(\delta). \quad (3.15)$$

Dalsze działanie wymaga założeń dla g , c i b . Załóżmy, że $b(n)$ jest funkcją Gaussa z dyspersją (rozrzutem) σ

$$b(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-n^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.16)$$

$$B(k) = \exp\left(-\frac{(2\pi\sigma k)^2}{2N^2}\right). \quad (3.17)$$

Przyjmując, że najwyższy pik w $c(n)$ jest w przybliżeniu kształtu funkcji Gaussa ze środkiem w δ o dyspersji μ :

$$c(n) \cong c(\delta)\exp\left(-\frac{(n-\delta)^2}{2\mu^2}\right), \quad (3.18)$$

$$C(k) = \sqrt{2\pi}\mu c(\delta)\exp\left(-\frac{(2\pi\mu k)^2}{2N^2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i\delta k}{N}\right). \quad (3.19)$$

Załóżmy także, że $g(n)$ posiada transformatę Fouriera, która może być przybliżona funkcją Gaussa w amplitudzie, lecz z fazą swobodną i dyspersją typową dla $g(n)$, parametryzowaną τ

$$|G(k)| = \sigma_g \left(\frac{2\pi N\tau}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(2\pi\tau k)^2}{2N^2}\right). \quad (3.20)$$

Wyrażenia na σ_{g*b} i $c * b(\delta)$ można uzyskać korzystając z zależności:

$$\sum_n \exp\left(-\frac{n^2}{\sigma^2}\right) \simeq \sqrt{\pi}\sigma, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{g*b}^2 = \frac{1}{N} \sum g * b(n)^2 = \frac{1}{N^2} \sum |G(k)B(k)|^2, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{g*b}^2 = \frac{1}{N^2} \sigma_g^2 \frac{2\pi N\tau}{\sqrt{\pi}} \sum \exp\left[-\left(\frac{2\pi\tau k}{N}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{2\pi\sigma k}{N}\right)^2\right] = \sigma_g^2 \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}, \quad (3.23)$$

$$c * b(\delta) = \frac{1}{N} \sum_k C(k)B(k)\exp\left(\frac{2\pi i\delta k}{N}\right), \quad (3.24)$$

$$c * b(\delta) = \frac{1}{N} \sqrt{2\pi}\mu c(\delta) \sum \exp\left(-\frac{(2\pi\mu k)^2}{2N^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(2\pi\sigma k)^2}{2N^2}\right) = c(\delta) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}. \quad (3.25)$$

Mimo tego, że $c(n)$ i $g(n)$ nie są w rzeczywistości funkcjami Gaussa, przybliżenie jest trafne. Parametr δ stanowi środek najwyższego piku w $c(n)$ i tak długo, jak ten pik będzie symetryczny, będzie to także środek najwyższego piku w

$$\frac{1}{\sigma_{g*b}} c * b(\delta). \quad (3.26)$$

Odpowiednią wartość dla σ można wyznaczyć maksymalizując (3.26)

$$0 = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{\sigma_{g*b}} c * b(\delta) = 2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \frac{1}{\sigma_{g*b}} c * b(\delta), \quad (3.27)$$

$$0 = \frac{\mu\sigma}{2} \frac{c(\delta)}{\sigma_g\sqrt{\tau}} (\sigma^2 + \tau^2)^{-3/4} (\sigma^2 + \mu^2)^{-3/2} \times [\sigma^2 + \mu^2 - 2(\sigma^2 + \tau^2)]. \quad (3.28)$$

Zatem wartość σ , która minimalizuje χ^2 jest równa:

$$\sigma^2 = \mu^2 - 2\tau^2. \quad (3.29)$$

Podsumowując: obserwowane widmo jest poddawane korelacji względem widma odniesienia, a powstały pik korelacyjny zostaje przybliżony symetryczną funkcją (wielomian kwadratowy). Wysokość piku wyznacza parametr γ , środek δ , z kolei σ jest wyznaczane poprzez kombinację szerokości piku z szerokością widma odniesienia.

3.2.3 Analiza błędów

Funkcja $c(x)$ posiada wiele pików korelacyjnych, które w przypadku wysoko zaszumionego widma mogą zniekształcać prawdziwy pik wpływając na wartość parametrów δ (położenie piku), h (wysokość) i w (szerokość połówkowa, ang. *full-width half-maximum, FWHM*) lub go przewyższyć powodując błędny wybór piku. W tym podrozdziale zostanie przedstawiona analiza błędów opisana przez Tonry'ego i Davisa (1979), uwzględniająca oszacowania błędów dla tych parametrów, jak i poziom ufności w wyborze prawidłowego piku.

Błąd przesunięcia (ang. Doppler shift error)

Statystyczna analiza błędów jest często niewystarczająca, gdyż największy przyczynek do błędu wnosi niedopasowanie widma odniesienia do widma obserwowanego. Rozważmy $c(x)$ jako sumę funkcji korelacji (CCF) przesuniętego widma względem widma odniesienia oraz pozostałej funkcji. Rozważając pierwszą część sumy CCF uzyskamy pik o poprawnej szerokości i położeniu, z kolei druga część wpłynie na zniekształcenie piku. Rozważmy przypadek

$$c(n) = h_0 g * b \times g(n - n_0) + a(n). \quad (3.30)$$

Użycie h_0 jest spowodowane możliwością różnicy obserwowanej wysokości h w $a(n_0) \neq 0$. W przypadku, gdy cała zależność od h zawiera się w h_0 , $b(n)$ będzie znormalizowane, zatem:

$$g * b \times g(0) = 1. \quad (3.31)$$

$c(n)$ jest znane, z kolei $a(n)$ jest losową funkcją, której wartość należy wyznaczyć. Warto zauważyć, że $g * b \times g(n - n_0)$ jest symetryczne względem $n = n_0$, ponieważ $b(n)$ jest symetryczne i każda funkcja autokorelacji jest symetryczna względem zera. Zatem antysymetryczna część $c(n)$ względem $n = n_0$ jest antysymetryczną częścią $a(n)$ względem $n = n_0$:

$$\frac{1}{2}[c(n + n_0) - c(-n + n_0)] = \frac{1}{2}[a(n + n_0) - a(-n + n_0)]. \quad (3.32)$$

W rzeczywistości n_0 nie jest znane, tylko przybliżone przez wartość δ . Ze względu na to, że procedura nie daje żadnej informacji na temat symetrycznej części $a(n)$,

wyznaczona jest tylko średnia kwadratowa (ang. *RMS*) antysymetrycznej części $c(n)$ względem δ . Jeśli założymy, że symetryczne i niesymetryczne części $a(n)$ są nieskorelowane, ale mają równe *RMS*, wówczas średnia kwadratowa $a(n)$ jest $\sqrt{2}$ razy większa niż średnia kwadratowa jej antysymetrycznego składnika:

$$\sigma_a^2 \cong \frac{1}{N} \frac{1}{2} \sum [c(n + \delta) - c(-n + \delta)]^2. \quad (3.33)$$

Rozważmy błąd $\varepsilon = \delta - n_0$ powstający w wyniku istnienia pików dodatniego lub ujemnego w $a(n)$ w okolicy n_0 zniekształcającego pik w $g * b \times g(n - n_0)$. Przesunięcie możemy oszacować, przyjmując przybliżenie pików do parabol:

$$h_0 g * b \times g(n - n_0) \cong h_0 \left(1 - \frac{2}{w_0^2} (n - n_0)^2 \right). \quad (3.34)$$

Gdy dwie parabole, których środki znajdują się w n_0 i n_1 dodane są do siebie wówczas pik wynikowy ma środek w:

$$\delta = \frac{n_0 d_0 + n_1 d_1}{d_0 + d_1}, \quad (3.35)$$

gdzie $d_0(n_0)$ i $d_1(n_1)$ to drugie pochodne. W tym przypadku prawdziwy pik ma $d_0 = -4hw^2$, podczas gdy typowy pik w $a(n)$ ma wysokość $\sqrt{2}\sigma_a$ i szerokość w . W pierwszym przybliżeniu istotny jest pik najbliższy n_0 , a jego średnia odległość od n_0 wynosi:

$$|n_1 - n_0| \cong \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2B}, \quad (3.36)$$

gdzie B oznacza największą liczbę falową, dla której transformata Fouriera $c(n)$ osiąga znaczącą amplitudę. Dzieje się tak, ponieważ najwyższa częstotliwość B tworzy $2B$ dodatnich i ujemnych pików w N przedziałach lub w przybliżeniu $N/2B$ przedziałów pomiędzy pikami, a średnia odległość do najbliższego wynosi

$$\frac{1}{4} \frac{N}{2B}. \quad (3.37)$$

Zdefiniujmy r jako stosunek wysokości prawdziwego pików do średniego pików w $a(x)$

$$r = \frac{h}{\sqrt{2}\sigma_a}. \quad (3.38)$$

Wówczas średni błąd możemy zapisać jako:

$$\varepsilon = \delta - n_0 = \left[n_0 \left(-\frac{4h}{w^2} \right) + \frac{1}{4} \frac{N}{2B} \left(-\frac{4\sqrt{2}\sigma_a}{w^2} \right) + n_0 \left(-\frac{4\sqrt{2}\sigma_a}{w^2} \right) \right] / \left(-\frac{4h}{w^2} - \frac{4\sqrt{2}\sigma_a}{w^2} \right) - n_0, \quad (3.39)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{N}{2B} \frac{1}{1+r}. \quad (3.40)$$

W praktyce dokładny współczynnik będący mnożnikiem $1/(1+r)$ jest tak dopasowany, że szacowany błąd jest równy zewnętrznym błędom policzonym w stosunku do niezależnie znanych prędkości.

Poziomy ufnosci

W przypadku dużego zaszumienia widma (niski stosunek sygnału do szumu) trudnością staje się zdefiniowanie prawdziwego pików korelacyjnego, ze względu na dużą ilość fałszywych maksimumów niejednokrotnie tej samej lub nawet większej wysokości. Przeważnie wybierany jest najwyższy pik, czasami dla pewności koreluje się widmo z trzema widmami odniesienia i wybór pada na pik, który jest najwidoczniejszy w tych trzech przypadkach. Statystycznie, wybór pików korelacji może być powiązany z oceną poziomu ufnosci. Używając modelu opisanego w równaniu (3.30) wyraz $hg * b \times g$ wnosi niewielki przyczynek do błędnych pików, ponieważ pik autokorelacji w zerze jest dużo większy od pozostałych. Funkcja $a(n)$ posiada ok. $2B$ dodatnich i ujemnych pików, których wysokości można przybliżyć rozkładem Gaussa o dyspersji $\sqrt{2}\sigma_a$. Znormalizowany rozkład prawdopodobieństwa pików szumu wysokości $h' > 0$ jest dany:

$$P(h')dh' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_a} \exp\left(-\frac{h'^2}{4\sigma_a^2}\right)dh', \quad (3.41)$$

$$P(r')dr' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)dr', \quad (3.42)$$

gdzie r' jest zdefiniowane analogicznie do r

$$r' = h' / \sqrt{2}\sigma_a. \quad (3.43)$$

Pod uwagę brane są tylko pików w obrębie pewnego obszaru, co oznacza, że rozważany jest tylko ułamek f całkowitej liczby B dodatnich pików.

Gdy prawidłowy pik ma wysokość h , a wybór padł na najwyższy z pików, prawdopodobieństwo pomyłki w wyborze pików jest prawdopodobieństwem, że choć jeden z pików funkcji $a(n)$ znajdujący się wewnątrz ułamka f dopuszczalnego przesunięcia ma wysokość $\geq h$. Wewnątrz ułamka znajduje się fB dodatnich pików, więc prawdopodobieństwo jest równe:

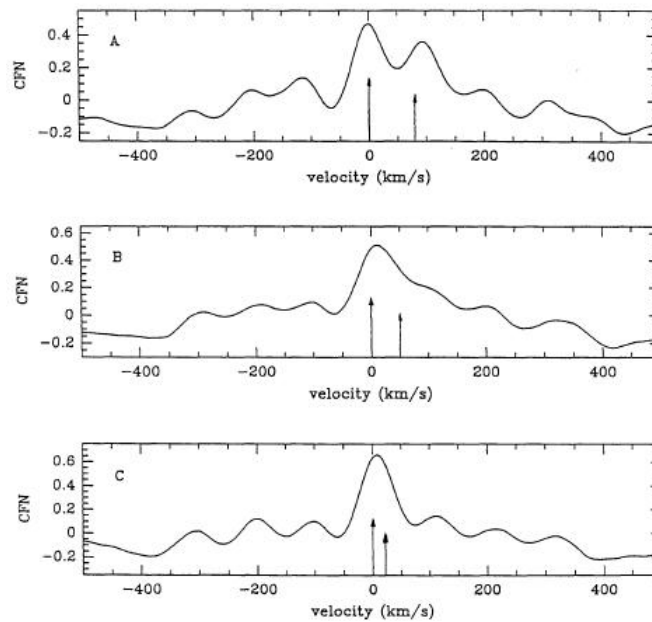
$$P(>h) = 1 - \left[1 - \int_h^\infty P(h')dh'\right]^{fB}. \quad (3.44)$$

Poziom ufnosci C wyboru pików jest wówczas $1 - P(>h)$, który wyraża się w r jako:

$$C = \left[1 - \int_r^\infty P(r')dr'\right]^{fB}. \quad (3.45)$$

3.3 Ograniczenia korelacji jednowymiarowej

W efekcie zastosowania metody korelacji krzyżowej do zmierzenia przesunięcia widma obserwowanego względem widma odniesienia otrzymujemy pik korelacyjny. W przypadku układów spektroskopowo podwójnych z widocznymi podwójnymi liniami (ang. *double-lined*, SB2) w wyniku zastosowania tego algorytmu

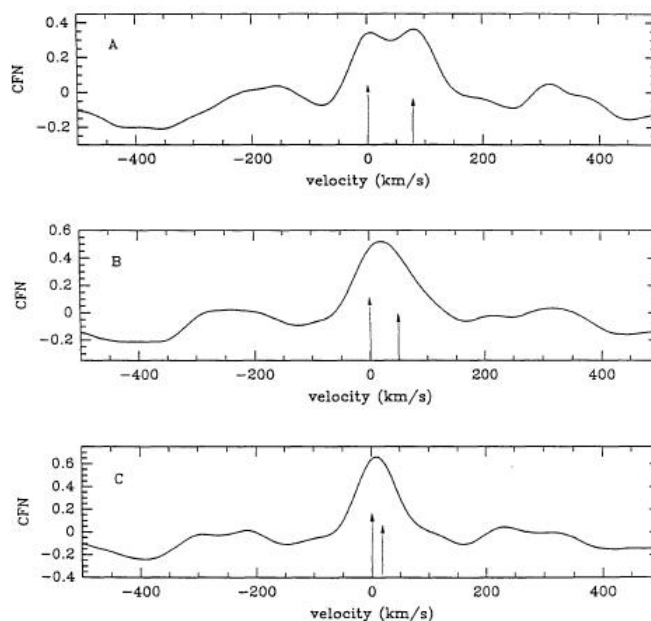


Rysunek 3.2: Jednowymiarowa korelacja krzyżowa układu typu SB2 dla widma odniesienia typu widmowego A. Strzałki wskazują prędkości składników układu użyte w symulacjach odpowiadające różnicy: 80 km/s, 50 km/s, 20 km/s (Zucker & Mazeh, 1994).

powinniśmy otrzymać dwa piki korelacyjne, odpowiadające odpowiednio dwóm składnikom. Przeważnie wyższy pik reprezentuje składnik główny, niższy - drugi. Jednak w przypadku porównywalnych prędkości radialnych składników (niska wartość względnej prędkości radialnej) metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej nie wykazuje niższego piku korelacyjnego, więc w rezultacie otrzymujemy jeden pik i możemy wyznaczyć tylko jedną prędkość radialną, która jest obarczona dużym błędem ze względu na obecność drugiego, niewidocznego w przebiegu funkcji CCF, składnika układu.

Zucker i Mazeh (1994) wykazali ograniczenia metody korelacji jednowymiarowej. Sprawdzili rozdzielność pików korelacji porównując uzyskane syntetyczne widmo gwiazdy podwójnej (kombinacja widm syntetycznych typu A i G) z widmami odniesienia dla typów widmowych A (rys. 3.2) i G (rys. 3.3) dla różnych różnic w prędkościach radialnych: 80 km/s, 50 km/s oraz 20 km/s. Prędkość radialna składnika pierwszego w obu przypadkach wynosi zero.

W obu przypadkach wyraźna rozdzielność pików widoczna jest wyłącznie przy różnicy w prędkościach 80 km/s. Dla różnicy prędkości 50 km/s w pierwszym przypadku drugi pik jest widoczny, ale wyznaczenie jego prędkości jest trudne. Wpływa on jednak wyraźnie na zmiany w położeniu pierwszego piku, co powoduje złe oszacowanie prędkości dla składnika głównego. Dla widma odniesienia typu



Rysunek 3.3: Jednowymiarowa korelacja krzyżowa układu typu SB2 dla widma odniesienia typu widmowego G. Strzałki wskazują prędkości składników układu użyte w symulacjach odpowiadające różnicy: 80 km/s, 50 km/s, 20 km/s (Zucker & Mazeh, 1994).

G przy różnicy prędkości 50 km/s, drugi pik zanika, ale położenie pierwszego jest zniekształcone obecnością drugiego składnika. W przypadku różnicy prędkości 20 km/s zarówno dla widma odniesienia typu A i G, widoczne jest tylko jedno maksimum korelacji, co jest mylące, bowiem jeden pik otrzymujemy dla gwiazdy pojedynczej. Dodatkowym problemem jest przesunięcie maksimum na osi prędkości, co wskazuje na wpływ niewidocznego składnika na widoczny i w efekcie daje złą wartość prędkości gwiazdy głównej.

3.4 Korelacja dwuwymiarowa

Widma gwiazd spektroskopowo podwójnych z widocznymi dwoma składnikami (typ SB2), dają w efekcie zastosowania metody korelacji krzyżowej dwa piki korelacyjne. Każdy z nich odnosi się do innego składnika układu i pozwala wyznaczyć prędkość radialną tej gwiazdy. Jednak w sytuacji, gdy względna prędkość obu składników jest stosunkowo niewielka (lub drugi składnik jest zbyt słaby), korelacja jednowymiarowa nie jest w stanie ich rozróżnić i otrzymujemy tylko jeden pik korelacji. Rozwiązaniem problemu jest zastosowanie korelacji dwuwymiarowej TODCOR (ang. *Two Dimensional CORrelation*, Zucker & Mazeh, 1994), stanowiącej uogólnienie korelacji jednowymiarowej.

3.4.1 Wprowadzenie

Algorytm zakłada, że obserwowane widmo jest złożeniem dwóch znanych widm z nieznanym ich względnym przesunięciem. Technika pozwala na wyznaczenie funkcji korelacji obserwowanego widma względem kombinacji dwóch widm odniesienia z wszystkimi możliwymi przesunięciami. Korelacja jest więc dwuwymiarową funkcją, w której dwoma niezależnymi zmiennymi są prędkości radialne obu składników. Położenie maksimum funkcji jest związane z aktualnymi przesunięciami dopplerowskimi obu gwiazd.

Przyjmijmy analogicznie jako widmo obserwowane, którego przesunięcie dopplerowskie chcemy wyznaczyć $f(n)$, a jako widmo odniesienia z zerowym przesunięciem $g(n)$. Oby dwa widma są funkcją n , gdzie

$$n = A \ln \lambda + B. \quad (3.46)$$

Przesuwając widmo odniesienia o s i wyznaczając korelację między obserwowanym widmem, a przesuniętym widmem odniesienia $g(n - s)$ uzyskujemy zależność korelacji od funkcji przesunięcia s :

$$C_{f,g} = C_{f,g}(s). \quad (3.47)$$

Korelujemy obserwowane widmo $f(n)$ z widmem odniesienia będącym złożeniem dwóch różnych widm $g_1(n)$ i $g_2(n)$ przesuniętych odpowiednio o s_1 i s_2 :

$$g_1(n - s_1) + g_2(n - s_2) \quad (3.48)$$

Funkcja korelacji jest zatem funkcją dwóch przesunięć:

$$R_{f,g_1,g_2} = R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2). \quad (3.49)$$

Poszukiwanie maksimum korelacji odbywa się w płaszczyźnie dwóch zmiennych (s_1, s_2) (prędkości radialne obu składników). Dokładny algorytm opisany jest w następnym podrozdziale.

Uwzględnienie drugiego widma odniesienia w korelacji dwuwymiarowej powoduje powstanie dodatkowej komplikacji. Należy bowiem wziąć pod uwagę względne natężenie obu widm odniesienia, a zatem algorytm musi uwzględniać tę zależność. W przypadku, gdy stosunek natężeń widm nie jest znany, zastępujemy nieznaną wartość dodatkową zmienną w funkcji korelacji krzyżowej. Ostatecznie korelujemy widmo obserwowane z:

$$g_1(n - s_1) + \alpha g_2(n - s_2), \quad (3.50)$$

a funkcja korelacji R_{f,g_1,g_2} jest funkcją s_1 , s_2 i α :

$$R_{f,g_1,g_2} = R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha). \quad (3.51)$$

By znaleźć maksimum funkcji w trójwymiarowej przestrzeni parametrów, TODCOR wykorzystuje fakt, że korelacja jest funkcją α . Można wyznaczyć analitycznie wartość α , dla której korelacja jest maksymalna dla dowolnie zadanych s_1 i s_2 .

3.4.2 Algorytm korelacji dwuwymiarowej

Opisana przez Tonry'ego i Davisa (1979) jednowymiarowa korelacja krzyżowa przedstawia się następująco:

$$C_{f,g}(s) = \frac{\sum_n f(n)g(n-s)}{N\sigma_f\sigma_g}, \quad (3.52)$$

gdzie N oznacza liczbę przedziałów widma, a σ_f i σ_g są średnimi kwadratowymi:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \sum_n f(n)^2. \quad (3.53)$$

Licznik równania 3.52 można wyliczyć przy użyciu szybkiej transformaty Fouriera (FFT, ang. *Fast Fourier Transform*). Oznaczmy dyskretną transformatę Fouriera (DFT, ang. *Discrete Fourier Transform*) funkcji $f(n)$ i $g(n)$ przez $F(n)$ i $G(n)$. Dyskretna transformata Fouriera dla $\sum_n f(n)g(n-s)$ jest równa:

$$F(k)G(k)^*, \quad (3.54)$$

gdzie $G(k)^*$ oznacza liczbę sprzężoną do $G(k)$.

W algorytmie korelacji dwuwymiarowej widmo obserwowane $f(n)$ korelujemy z kombinacją dwóch widm odniesienia z dwoma różnymi przesunięciami linii:

$$g(n-s_1) + \alpha g_2(n-s_2), \quad (3.55)$$

gdzie α jest stosunkiem natężeń dwóch gwiazd. Chwilowo zakładamy, że α jest znane.

Rozwinięciem równania (3.52) jest:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{\sum_n f(n)[g_1(n-s_1) + \alpha g_2(n-s_2)]}{N\sigma_f\sigma_g(s_1, s_2)}, \quad (3.56)$$

gdzie:

$$\sigma_g^2(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \sum_n [g_1(n-s_1) + \alpha g_2(n-s_2)]^2. \quad (3.57)$$

Licznik równania (3.56) możemy zapisać jako sumę dwóch sum:

$$\sum_n f(n)g_1(n-s_1) + \alpha \sum_n f(n)g_2(n-s_2), \quad (3.58)$$

z których każda może być wyznaczona przy użyciu FFT, analogicznie jak licznik w równaniu (3.52).

Jednak mianownik równania (3.56) zawiera σ_g , które w odróżnieniu od stałego σ_g w równaniu (3.52), jest funkcją s_1 i s_2 . Warto zauważyć, że:

$$\sigma_g^2(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \left[\sum_n g_1^2(n-s_1) + 2\alpha \sum_n g_1(n-s_1)g_2(n-s_2) + \alpha^2 \sum_n g_2^2(n-s_2) \right] \quad (3.59)$$

$$\sigma_g^2(s_1, s_2) = \sigma_{g_1}^2 + 2\frac{\alpha}{N} \sum_n g_1(n-s_1)g_2(n-s_2) + \alpha^2\sigma_{g_2}^2. \quad (3.60)$$

Pierwszy i trzeci składnik sumy zawierają średnie kwadratowe odpowiednich widm odniesienia. Drugi składnik sumy ma taką samą postać jak licznik równania (3.52), zatem możemy go wyznaczyć używając FFT.

Otrzymujemy zatem:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{\sum_n f(n)g_1(n-s_1) + \alpha \sum_n f(n)g_2(n-s_2)}{N\sigma_f \sqrt{\sigma_{g_1}^2 + 2\frac{\alpha}{N} \sum_n g_1(n)g_2[n-(s_2-s_1)] + \alpha^2\sigma_{g_2}^2}} \quad (3.61)$$

Zdefiniujmy:

$$C_1(s_1) \equiv \frac{1}{N\sigma_f\sigma_{g_1}} \sum_n f(n)g_1(n-s_1), \quad (3.62)$$

$$C_2(s_2) \equiv \frac{1}{N\sigma_f\sigma_{g_2}} \sum_n f(n)g_2(n-s_2), \quad (3.63)$$

$$C_{12}(s_2-s_1) \equiv \frac{1}{\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}} \sum_n g_1(n)g_2(n-(s_2-s_1)). \quad (3.64)$$

Równanie (3.61) możemy zapisać:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{\sigma_{g_1}C_1(s_1) + \alpha\sigma_{g_2}C_2(s_2)}{\sqrt{\sigma_{g_1}^2 + 2\alpha\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}C_{12}(s_2-s_1) + \alpha^2\sigma_{g_2}^2}}. \quad (3.65)$$

Przyjmując definicję $\alpha' \equiv \frac{\sigma_{g_2}}{\sigma_{g_1}}\alpha$ możemy zapisać:

$$R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha) = \frac{C_1(s_1) + \alpha'C_2(s_2)}{\sqrt{1 + 2\alpha'C_{12}(s_2-s_1) + \alpha'^2}}. \quad (3.66)$$

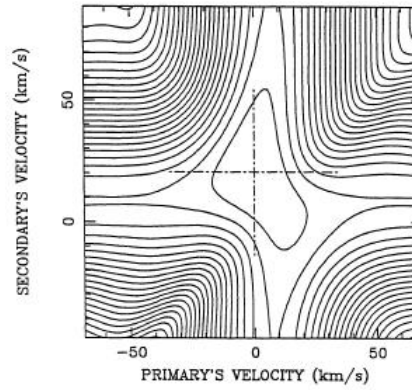
Wyrażenie wskazuje na zależność funkcji korelacji dwuwymiarowej od trzech korelacji jednowymiarowych $C_1(s_1)$, $C_2(s_2)$ oraz $C_{12}(s_2-s_1)$. Są to odpowiednio korelacje pomiędzy widmem obserwowanym, a pierwszym widmem odniesienia, widmem obserwowanym, a drugim widmem odniesienia oraz pomiędzy dwoma widmami odniesienia.

Chcąc otrzymać błędy oszacowań wartości każdego z przesunięć, np. s_2 możemy ustalić drugie przesunięcie - s_1 do jego wartości w maksimum \hat{s}_1 i przeanalizować funkcję:

$$P(s_2) = R_{f,g_1,g_2}(\hat{s}_1, s_2, \alpha). \quad (3.67)$$

Analiza pokazuje, że jest to korelacja krzyżowa funkcji f względem g_2 po odjęciu g_1 od f z uwzględnieniem odpowiedniej wagi. Zatem oszacowanie błędów można wykonać wykorzystując procedurę szacowania błędów dla korelacji jednowymiarowej.

Do tej pory zakładaliśmy, że względny stosunek natężeń obu widm α był znany. Rozważmy teraz sytuację, gdy α nie jest znane. Chcemy otrzymać dla obu wartości przesunięć s_1 i s_2 wartość α , która maksymalizuje korelację pomiędzy



Rysunek 3.4: Wykres funkcji dwuwymiarowej korelacji krzyżowej wokół swego maksimum. Linie przerywane są równoległe do osi prędkości s_1 i s_2 i przechodzą przez maksimum (Zucker & Mazeh, 1994).

$f(n)$ i liniową kombinacją widm g_1 i g_2 . Oznacza to wyznaczenie dla obu przypadków s_1 oraz s_2 wartości α , dla której funkcja $R_{f,g_1,g_2}(s_1, s_2, \alpha)$ osiąga maksimum. Po zróżniczkowaniu i przyrównaniu do zera, uzyskujemy wartość α , która daje maksymalną korelację:

$$\hat{\alpha}(s_1, s_2) = \left(\frac{\sigma_{g_1}}{\sigma_{g_2}} \right) \left[\frac{C_1(s_1)C_{12}(s_2 - s_1) - C_2(s_2)}{C_2(s_2)C_{12}(s_2 - s_1) - C_1(s_1)} \right], \quad (3.68)$$

zatem funkcja korelacji dla tej wartości α przyjmuje postać:

$$R_{f,g_1,g_2}[s_1, s_2, \hat{\alpha}] = \sqrt{\frac{C_1^2(s_1) - 2C_1(s_1)C_2(s_2)C_{12}(s_2 - s_1) + C_2^2(s_2)}{1 - C_{12}^2(s_2 - s_1)}}. \quad (3.69)$$

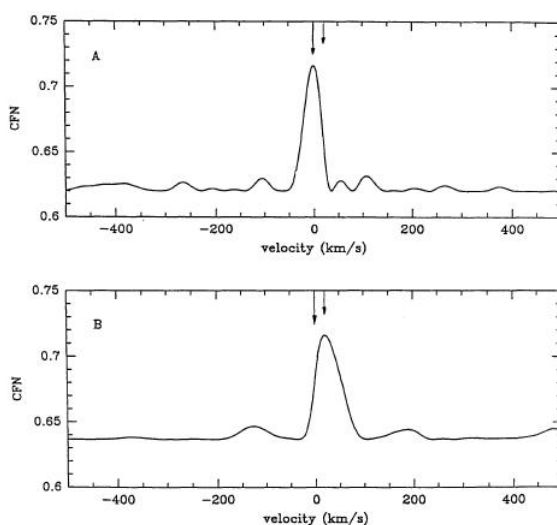
Wyrażenie to jest uproszczeniem ogólnej metody używanej w statystyce - korelacji wielokrotnej, dla której zastosowanie mogą stanowić układy potrójne i wielokrotne.

3.4.3 Test metody

Zucker i Mazeh (1994) przeprowadzili szereg testów TODCORa dla uzyskanych za pomocą symulacji widm. Poniżej znajduje się opis jednego z nich.

Widmo gwiazdy podwójnej zostało wysymulowane z połączenia widm typu A i G (modele Kurucza, 1991). Użyty zakres długości fali wynosił 5170Å - 5210Å. Prędkości rotacji obu gwiazd wynosiły 40 km/s, a stosunek natężeń 0.25. Do każdego z 2048 pikseli widma dodano szum o stosunku sygnału do szumu S/N=20. Użyto trzech różnych różnic w wartościach prędkości pomiędzy składnikami: 80, 50 i 20 km/s.

Rysunek 3.4 przedstawia funkcję dwuwymiarowej korelacji krzyżowej w najtrudniejszym przypadku - gdy różnica pomiędzy prędkościami wynosi 20 km/s.



Rysunek 3.5: Przekroje poprzeczne funkcji dwuwymiarowej korelacji krzyżowej wzdłuż przerywanych linii na rys. 3.4. Strzałki wskazują na prędkości użyte w symulacjach (Zucker & Mazeh, 1994).

Maksimum znajduje się w punkcie $s_1 = 0.0 \pm 0.7$ km/s, $s_2 = 20.5 \pm 0.7$ km/s dla stosunku natężeń 0.27 ± 0.04 . Wynik jest zgodny z wysoką dokładnością z rzeczywistymi wartościami użytymi w symulacji.

Rysunek 3.5 przedstawia przekroje poprzeczne funkcji korelacji dwuwymiarowej przedstawionej na rysunku 3.4. W rzeczywistości wykresy na rys. 3.5 przedstawiają korelację jako funkcję przesunięcia jednego z widm odniesienia, bez uwzględnienia drugiego przesunięcia.

Testy zostały przeprowadzone także dla wartości względnych przesunięć 50 km/s i 80 km/s. W obu przypadkach parametry były bliskie z dużą dokładnością wartościom rzeczywistym.

Wyżej przedstawione przykłady świadczą o dużych możliwościach korelacji dwuwymiarowej i pokazują, że algorytm może rozdzielić widma wielu układów spektroskopowo podwójnych *SB2*.

3.5 Metoda największej wiarygodności - nowe podejście do połączenia funkcji korelacji krzyżowej

Właściwości metody korelacji krzyżowej studiowane były dogłębnie w celu poprawy precyzji wyznaczania prędkości radialnych. W związku z tym zaproponowanych zostało wiele metod oceny precyzji ich wyznaczania (np. Tonry & Davis, 1979, Connes, 1985; Murdoch & Hearnshaw; 1991). Zucker i Mazeh zaproponowali także dwuwymiarową korelację krzyżową (TODCOR) stanowiącą uogólnienie metody jednowymiarowej.

Rozwój technologii przekładający się także na spektrografię, przyczynił się do rozwoju technik detekcji promieniowania. Wyzwaniem dla technik analizy danych okazały się widma wielorzędowe. W celu zwiększenia precyzji wyznaczania prędkości radialnych w przypadku takich widm należy powiązać informacje pochodzące z poszczególnych ich rzędów, zmniejszając jednocześnie stosunek sygnału do szumu do wartości wymaganej, by otrzymać żądaną precyzję. Jednym z rozwiązań (Connes, 1985 i Bouchy, Pepe & Queloz, 2001) było obliczanie wartości funkcji korelacji krzyżowej dla każdego rzędu z osobna oraz wyznaczanie średniej ważonej z wynikowych funkcji. Wagi użyte przez Connesa i Bouchy'ego odzwierciedlają ocenę stosunku sygnału do szumu dla poszczególnych rzędów.

Zucker (2003) zaproponował inne podejście do badania właściwości korelacji krzyżowej. Wykazał, że przy pewnych założeniach, pomiary prędkości radialnych z użyciem korelacji krzyżowej są równoznaczne z użyciem metody największej wiarygodności do ich wyznaczenia. To rozwiązanie prowadzi w naturalny sposób do oceny błędów i powstania nowej procedury łączenia funkcji korelacji krzyżowej. Zucker wykazał (teoretycznie i poprzez symulacje), że to rozwiązanie przewyższa techniki wcześniej proponowane zarówno pod względem uzyskanej precyzji, jak i zdolności detekcji sygnału.

3.5.1 Od metody największej wiarygodności do korelacji krzyżowej

Podstawowe założenia

Przyjmując stosowane wcześniej oznaczenia ($f(n)$ - widmo obserwowane, $g(n)$ - widmo odniesienia) i założenia (każde z widm jest zdefiniowane jako funkcja numeru przedziału n , gdzie $n = A \ln \lambda + B$), przypomnijmy, że przesunięcie dopplerowskie wyraża się stałym przesunięciem liniowym widma.

Zucker (2003) przedstawił model statystyczny, który zakłada, że widmo obserwowane zostało wyprodukowane przez pomnożenie widma odniesienia przez pewną stałą skalującą (a_0), przesunięcie go (s_0 przedziałów) i dodanie losowego białego szumu d_n (rodzaj szumu o całkowicie płaskim widmie) gaussowskiego z dopasowanym odchyleniem standardowym (σ_0)

$$f(n) = a_0 g(n - s_0) + d_n, \quad (3.70)$$

$$d_n \sim N(0, \sigma_0^2). \quad (3.71)$$

Oczywiście, a_0 i s_0 nie są znane z góry. σ_0 często jest definiowane w literaturze jako wartość znana, lecz w poniższych rozważaniach przyjmujemy, że odchylenie standardowe także nie jest znane.

Przyjmijmy także założenie, że widma mają odjęte kontinuum (najlepiej pasujący wielomian najniższego stopnia został odjęty od widma):

$$\sum_n f(n) = 0 \quad (3.72)$$

$$\sum_n g(n) = 0. \quad (3.73)$$

Ocena największej wiarygodności

Wiarygodność jest definiowana jako prawdopodobieństwo obserwowanych wyników. W naszym przypadku:

$$L = \prod_n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp\left\{ -\frac{[f(n) - ag(n-s)]^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (3.74)$$

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp\left\{ -\sum_n \frac{[f(n) - ag(n-s)]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (3.75)$$

Kolejny krok zakłada wyznaczenie wartości parametrów, które maksymalizują logarytm naturalny funkcji wiarygodności. Logarytm ten ma postać:

$$\ln L = -N \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_n [f(n) - ag(n-s)]^2 + \text{constant}, \quad (3.76)$$

gdzie stała jest niezależna od parametrów. Wartości σ , a i s , które maksymalizują powyższą funkcję dane są wzorami

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_n [f(n) - \hat{a}g(n - \hat{s})]^2, \quad (3.77)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_n f(n)g(n - \hat{s})}{\sum_n g^2(n)}, \quad (3.78)$$

\hat{s} jest z kolei wartością maksymalizującą funkcję korelacji krzyżowej zdefiniowaną jako:

$$R(s) = \frac{1}{N} \sum_n f(n)g(n-s). \quad (3.79)$$

Wprowadźmy notację ułatwiającą późniejsze wyprowadzenia. Jako σ_f oraz σ_g oznaczymy średnie kwadratowe widm: analizowanego i odniesienia:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \sum_n f^2(n), \quad (3.80)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{N} \sum_n g^2(n). \quad (3.81)$$

Zdefiniujmy $C(s)$ jako funkcję znormalizowanej korelacji krzyżowej pomiędzy f oraz g :

$$C(s) = \frac{R(s)}{\sigma_f \sigma_g}, \quad (3.82)$$

gdzie normalizacja powoduje, że $|C(s)|$ jest mniejsze od jedności. Skoro $C(s)$ jest proporcjonalne do $R(s)$, \hat{s} może być zdefiniowane jako przesunięcie maksymalizujące funkcję znormalizowanej korelacji krzyżowej.

Korzystając z wyżej przedstawionej notacji, wyrażenia na $\hat{\sigma}$ oraz \hat{a} można przedstawić jako:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_f^2 [1 - C^2(\hat{s})], \quad (3.83)$$

$$\hat{a} = \frac{R(\hat{s})}{\sigma_g^2}. \quad (3.84)$$

Uwzględniając te relacje w wyrażeniu na $\log L$, otrzymujemy

$$\log L = -\frac{N}{2} \log[1 - C^2(\hat{s})] + \text{constant}. \quad (3.85)$$

Wiarygodność jest zatem monotoniczną funkcją rosnącą znormalizowanej korelacji krzyżowej do kwadratu. Zależność od kwadratu korelacji, powoduje, że prawdopodobieństwo rośnie dla ujemnych wartości korelacji. To zachowanie jest powiązane z formalną możliwością, gdy czynnik skalujący a jest ujemny. Nie ma to jednak głębszego astrofizycznego znaczenia; oznacza jedynie, że wszystkie oczekiwane linie absorpcyjne są liniami emisyjnymi i odwrotnie.

Ocena błędów

Teoria największej wiarygodności zawiera w sobie także sposób oceny błędów lub przedziałów ufności dla parametrów. Wykazano (Kendall & Stuart, 1967), że w standardowych przypadkach macierz kowariancji parametrów jest ujemną odwrotnością macierzy Hessego funkcji logarytmu wiarygodności w jej maksimum. Wyznamy tę macierz i podstawmy wartości w maksimum, uznając przesunięcie s jako zmienną ciągłą

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} \Big|_{max} = -N \frac{s_g^2}{\hat{\sigma}^2} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \Big|_{max} = \frac{N}{\hat{\sigma}^2} - \frac{3}{\hat{\sigma}^4} \sum_n [f(n) - \hat{a}g(n - \hat{s})]^2 = -\frac{2N}{\hat{\sigma}^2}, \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial s^2} \Big|_{max} = \frac{\hat{a}NR''(\hat{s})}{\hat{\sigma}^2}, \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial \sigma} \Big|_{max} = \frac{2N}{\hat{\sigma}^3} [R(\hat{s}) - \hat{a}s_g^2] = 0, \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial s} \Big|_{max} = -\frac{NR'(\hat{s})}{\hat{\sigma}^2} = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial s} \Big|_{max} = -\frac{2\hat{a}NR'(\hat{s})}{\hat{\sigma}^2} = 0, \quad (3.91)$$

gdzie $R'(s)$ i $R''(s)$ są pierwszą i drugą pochodną funkcji kowariancji krzyżowej. Dwa ostatnie równania są wynikiem definicji \hat{s} jako przesunięcia, gdy została osiągnięta maksymalna korelacja.

Widać więc, że macierz Hessego jest diagonalna, zatem odwrócenie jej nie stanowi problemu. Poszukiwany błąd do kwadratu wynosi

$$\sigma_s^2 = -\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{a}NR''(\hat{s})} = -\left[N\frac{C''(\hat{s})}{C(\hat{s})}\frac{C^2(\hat{s})}{1-C^2(\hat{s})}\right]^{-1}, \quad (3.92)$$

gdzie $C''(\hat{s})$ jest drugą pochodną funkcji korelacji krzyżowej.

Jeśli widmo odniesienia, którego używamy do porównania jest także zaszumione, otrzymany błąd różni się od wyznaczonego. Obliczenia wówczas stają się dużo bardziej skomplikowane i prowadzą do wniosku, że błąd jest około $\sqrt{2}$ razy większy, niż oszacowany wyżej. Ułatwieniem jest stosowanie tego samego widma odniesienia do wszystkich widm obserwowanych, wówczas bowiem opisany wyżej model jest w przybliżeniu właściwy, ponieważ na rozrzut prędkości wpływa tylko zaszumienie widma obserwowanego, podczas gdy zaszumienie widma odniesienia dostarcza błędu systematycznego.

Przeprowadzono symulacje (Zucker, 2003) mające na celu przetestowanie powyższych rozważań dotyczących oceny błędów. Jako widma wzorcowego użyto pojedynczego rzędu widma z zakresu 5621 - 5683 Å podzielonego na 1920 przedziałów. Zaszumienie widma uzyskano poprzez dodanie białego szumu o gaussowskim rozkładzie amplitud, którego odchylenie standardowe wynosiło 0.05, 0.1 i 0.2. Korelując widmo wzorcowe względem zaszumionych uzyskano przebieg funkcji CCF ukazany na rysunku 3.6.

Dokładne położenie piku korelacji i wartości odpowiednich pochodnych zostały wyznaczone poprzez dopasowanie paraboli do maksimum CCF. Każdą symulację powtórzono 10 000 razy. Rysunek 3.7 przedstawia rozkład stosunku zmiany wartości CCF (Δv) do wyznaczonego błędu σ_v . Wykresy wskazują, że rozkład tego stosunku ma postać rozkładu Gaussa dla wszystkich poziomów szumu.

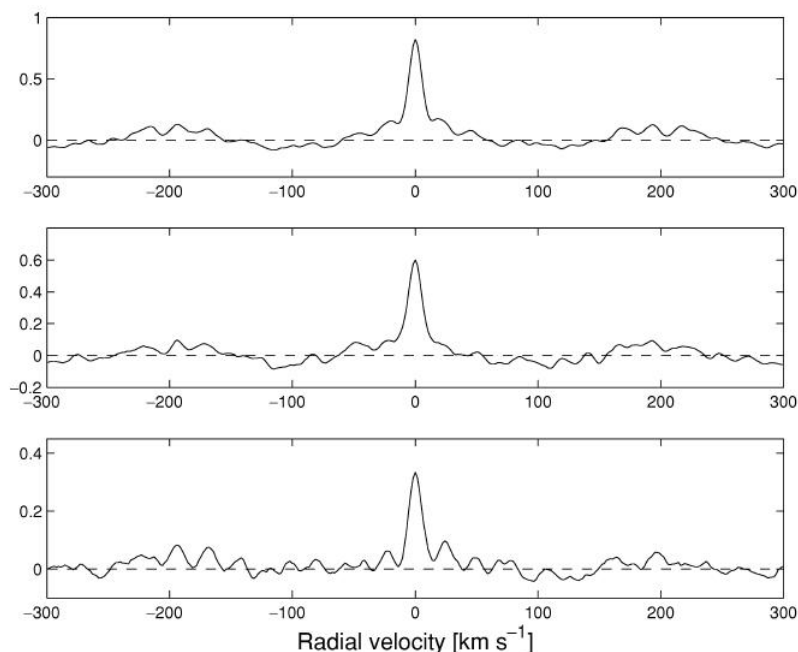
3.6 Połączenie funkcji korelacji krzyżowej

Założmy, że mamy M oddzielnych widm, z których każde posiada swoje własne widmo odniesienia. Wszystkie z nich mają to samo przesunięcie dopplerowskie. Widma te mogą stanowić pojedyncze ekspozycje tego samego obiektu lub oddzielne rzędy tego samego widma (ekspozycji). Założmy także, że widma podzielone są na równą ilość przedziałów N . Nie zakładamy jednak jednakowego stosunku sygnału do szumu (S/N) oraz tych samych czynników skalujących.

Najprostszym sposobem zapisu połączenia funkcji to prosta średnia (SA)

$$SA(s) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_i(s), \quad (3.93)$$

gdzie M jest ilością funkcji korelacji krzyżowej mających być połączonymi, $C_i(s)$ jest i -tą funkcją korelacji, wyznaczoną w oparciu o i -te widmo obserwowane i i -te widmo odniesienia.



Rysunek 3.6: Przebieg funkcji korelacji krzyżowej dla widma wzorcowego i widm z zaszumieniem o odchyleniu standardowym równym odpowiednio 0.05 (górze), 0.1 (środek), 0.2 (dół) (Zucker, 2003).

Inny nieskomplikowany schemat połączenia funkcji jest oparty na współczynniku determinacji tzn. kwadracie współczynnika korelacji, w naszym przypadku $C^2(s)$. Wielkość ta używana jest zazwyczaj w analizie regresji do opisu stopnia, w jakim zmienność jednej zmiennej jest wyjaśniona przez drugą. Połączenie współczynników determinacji (DC) przedstawia się w sposób następujący:

$$DC^2(s) = \frac{1}{M} \sum_i C_i^2(s). \quad (3.94)$$

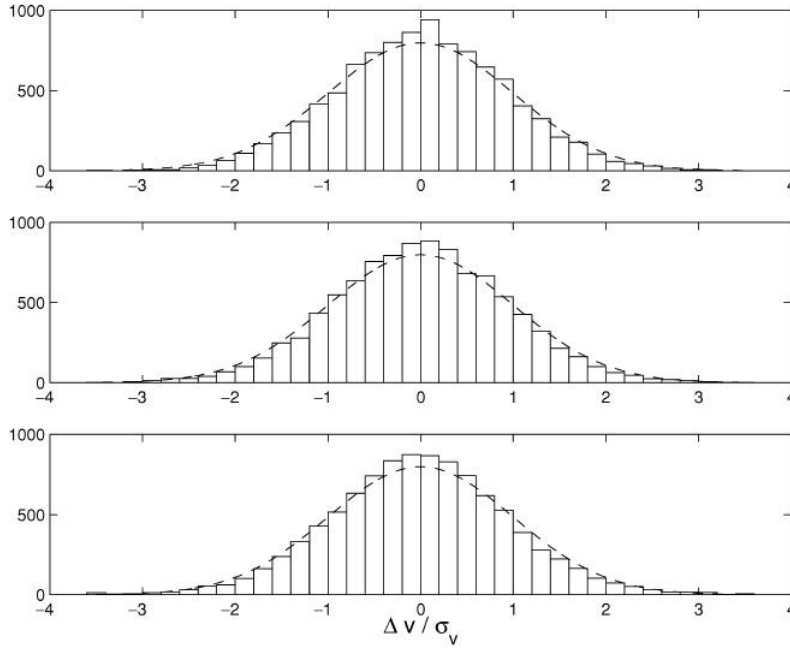
Wartość ta może być interpretowana jako suma ważona funkcji korelacji.

Metoda największej wiarygodności (ML) może dostarczyć dodatkowy sposób połączenia funkcji korelacji krzyżowej. Całkowita wiarygodność obserwacji wyraża się jako:

$$L = \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_n [f_i(n) - a_i g_i(n-s)]^2 \right\}. \quad (3.95)$$

Logarytmując, otrzymujemy

$$\log L = - \sum_i \left\{ N \log \sigma_i - \frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_n [f_i(n) - a_i g_i(n-s)]^2 \right\} + \text{constant}. \quad (3.96)$$



Rysunek 3.7: Histogram stosunku przesunięcia funkcji korelacji (Δv) do wyznaczonego błędu σ_v . Trzy wykresy odpowiadają poziomom szumu o odchyleniu równym 0.05, 0.1 i 0.2 odpowiednio. Linia przerywaną oznaczono przebieg standardowego rozkładu Gaussa (Zucker, 2003).

Podstawiając optymalne wartości σ_i i a_i , otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\log L = -\frac{N}{2} \sum_i \log[1 - C_i^2(s)] + \text{constant}, \quad (3.97)$$

które jest bardzo podobne do równania 3.85. Możemy zatem przyrównać te dwa równania w celu uzyskania efektywnej wartości korelacji ML :

$$NM \log[1 - ML^2(s)] = \sum_i N \log[1 - C_i^2(s)], \quad (3.98)$$

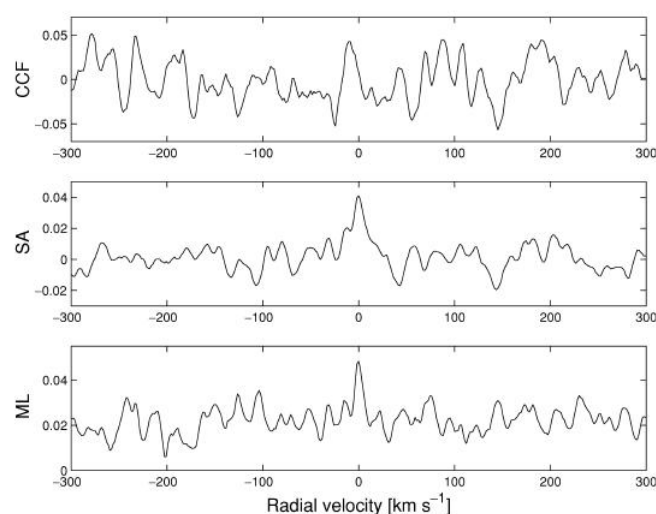
lub

$$ML^2(s) = 1 - \left\{ \prod_i [1 - C_i^2(s)] \right\}^{\frac{1}{M}}. \quad (3.99)$$

Dla wystarczająco małych $C_i(s)$ powyższa zależność zamienia się w wyrażenie na średni współczynnik determinacji $DC(s)$. W przypadku, gdy $C_i(s)$ jest bliskie jedności (wysoki stosunek S/N), $ML(s)$ także osiąga wartość bliską jeden.

W celu uzyskania oceny błędów przesunięcia, należy wyznaczyć i odwrócić macierz Hessego. W tym przypadku hesjan nie jest diagonalny, co utrudnia obliczenia. Błąd wynosi wówczas

$$\sigma_s^2 = - \left[MN \frac{ML''(\hat{s})}{ML(\hat{s})} \frac{ML^2(\hat{s})}{1 - ML^2(\hat{s})} \right]^{-1} \quad (3.100)$$



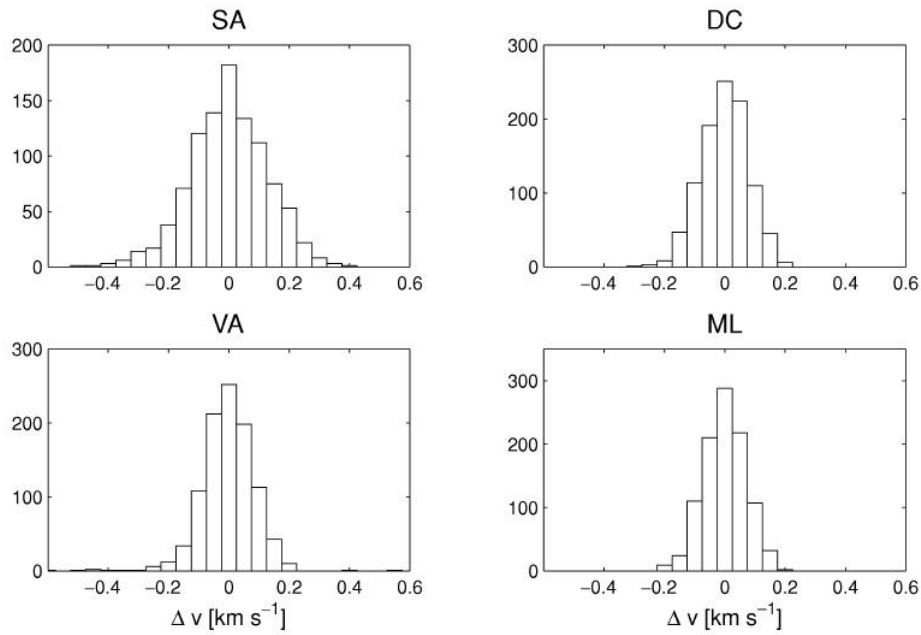
Rysunek 3.8: Na górze: funkcja korelacji krzyżowej dla pojedynczego rzędu widma. Na środku: prosta średnia (SA) funkcji korelacji krzyżowych dla 10 rzędów widma. Na dole: połączenie funkcji CCF metodą największej wiarygodności (ML) dla tych samych 10 rzędów widma (Zucker, 2003).

i jest bardzo podobny do wyrażenia na błąd w przypadku pojedynczego widma, z zamianą $N!$ na całkowitą liczbę przedziałów MN .

Symulacje połączenia funkcji korelacji krzyżowej różnymi sposobami (Zucker, 2003) ukazują znaczenie tej metody. Do symulacji użyto 10 rzędów widma, pokrywających zakres $5189 - 5683 \text{ \AA}$, ze stosunkiem sygnału do szumu równym 3.5. Wyniki testu przedstawione są na rysunku 3.8.

Górny wykres przedstawia funkcję korelacji krzyżowej dla jednego rzędu widma. W tym przypadku nie można rozróżnić wiodącego piku korelacyjnego. Wykres drugi przedstawia połączenie funkcji korelacji poprzez zastosowanie ich prostej średniej (SA) dla 10 rzędów widma. Pik korelacji jest widoczny, mimo niewielkiego współczynnika korelacji. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku wykresu trzeciego, przedstawiającego połączenie funkcji korelacji (10 rzędów widma) przy użyciu zaproponowanej przez Zuckera metody największej wiarygodności (ML) - pik korelacyjny jest także widoczny. Wyniki symulacji ukazują istotność łączenia funkcji korelacji. W tym przypadku niemożliwe jest wyznaczenie przesunięcia (prędkości radialnej) dla pojedynczego rzędu, lecz w efekcie połączenia funkcji produkowane jest widoczne maksimum, a prędkość jest wyznaczalna.

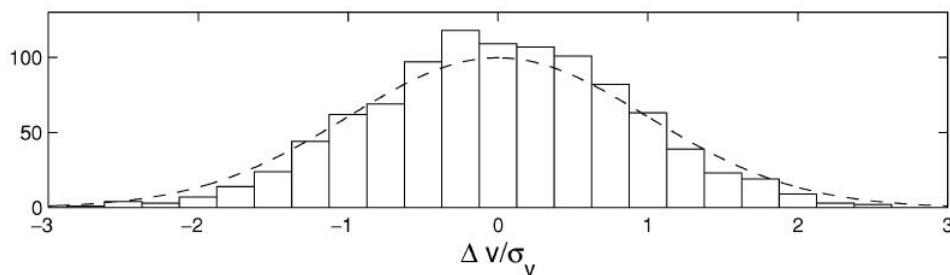
Kolejne przeprowadzone testy (Zucker, 2003) ukazują wyższość metody największej wiarygodności (ML) nad dwoma omówionymi wcześniej średnimi: prostej (SA) i połączenia współczynników determinacji (DC). Jest to zauważalne głównie w przypadku, gdy stosunek sygnału do szumu zmienia swą wartość wzdłuż widma. By to pokazać, dodano do widma szum, którego odchylenie standardowe



Rysunek 3.9: Rozkład położenia pików dla każdej z czterech metod łączenia funkcji CCF: prostej średniej (SA), połączenia współczynników determinacji (DC), średniej ważonej dla każdego z rzędów (VA) oraz metody największej wiarygodności (VA) (Zucker, 2003).

wynosiło $0.1i$, gdzie i jest numerem rzędu widma. Na rysunku 3.9 przedstawiono rozkład położenia maksimum dla każdej z metod połączenia funkcji CCF po powtórzeniu symulacji 1000 razy. Dodatkowo ukazano histogram prędkości uzyskanych po zastosowaniu średniej ważonej z prędkości otrzymanej dla każdego z rzędów (VA). Średnia ta może być wyznaczona wyłącznie w przypadku poprawnego zidentyfikowania maksimum CCF we wszystkich rzędach. Histogram ukazujący rozkład położenia pików korelacyjnych wynikających z zastosowania metody największej wiarygodności (ML) charakteryzuje się najmniejszą wartością odchylenia $\sigma_{ML} = 0.068 \text{ km/s}$. W przypadku pozostałych metod uzyskano wyniki: $\sigma_{SA} = 0.128 \text{ km/s}$, $\sigma_{DC} = 0.078 \text{ km/s}$, $\sigma_{VA} = 0.099 \text{ km/s}$.

Dodatkowym kryterium porównania pomiędzy różnymi metodami łączenia CCF jest ich zdolność do odznaczania poprawnego pików względem pozostałych maksimum. Zdolność ta jest istotna szczególnie w przypadku rozważania słabych obiektów, których widma mają niski stosunek S/N. Test (Zucker, 2003) przeprowadzono w oparciu o przyjęcie założenia, że wysokości pików pozostałych są równe odchyleniom standardowym funkcji w rejonie odpowiednio odległym od maksimum głównego. Zostały one wyliczone dla dwóch części składających się z 500 przedziałów po obu stronach poprawnego pików w odległości co najmniej 100 przedziałów od niego. Średnie stosunki wysokości pików głównego do pozostałych



Rysunek 3.10: Histogram stosunku przesunięcia wyznaczonych korelacji na podstawie metody największej wiarygodności (Δv) do wyznaczonego błędu σ_v . Linia przerywaną oznaczono przebieg standardowego rozkładu Gaussa (Zucker, 2003).

maksimów (czyli odchylenia standardowego maksimum głównego) wynosiły 36, 58 i 65, odpowiednio dla SA, DC i ML. Test potwierdził więc słusność wyższości metody największej wiarygodności (ML) nad innymi sposobami łączenia funkcji korelacji.

Po stwierdzeniu wyższości metody największej wiarygodności względem innych sposobów łączenia funkcji CCF potwierdzono szacunek błędów w sposób podobny jaki w przypadku pojedynczego rzędu widma. Rezultaty w formie histogramu stosunku $\Delta V/\sigma V$ obliczonego w wyniku 1000 symulacji dla dziesięciu rzędów widma ukazano na rysunku 3.10. I w tym przypadku widoczna jest zgodność rozkładu ze standardowym rozkładem Gaussa.

Rozdział 4

Wyznaczanie parametrów układów podwójnych zaćmieniowych FM Leo i FK Leo

4.1 Wprowadzenie

Rozdział zawiera omówienie części praktycznej wykonanej w ramach pracy magisterskiej. Składają się na niego opis redukcji widm, a także procedur użytych w trakcie stosowania wcześniej zreferowanych metod oraz wyznaczania parametrów fizycznych opisujących każdą z gwiazd układów FM Leo i FK Leo, jak i charakteryzujących układ podwójny jako całość.

4.2 Redukcja widm i pomiar prędkości radialnych

4.2.1 Redukcja widm

Proces redukcji widm składa się z procedury przygotowawczej mającej na celu przygotowanie ramek CCD do obróbki oraz etapu redukcji, którego efektem jest uzyskanie zależności natężenia od długości fali dla badanego obiektu.

Przygotowanie ramek CCD

W procesie wykonywania ekspozycji kamerą CCD na drodze do otrzymania ostatecznego obrazu, należy wziąć pod uwagę czynniki negatywnie wpływające na jego jakość: wynikające z praw fizyki, rozwiązań konstrukcyjnych, a także zwykłego zabrudzenia. Ze względu na szumy detektora w procesie wykonywania ekspozycji należy uwzględnić tzw. offset (*bias*), klatkę ciemną (*dark frame*) i

pole wyrównujące (*flat field*). Offset jest dodatnim ładunkiem przyłożonym do CCD, aby uaktywnić jego pojemność zbierającą fotony. Jest obecny jako fałszywy sygnał w każdym zdjęciu. Klatkę offsetową można stworzyć poprzez wykonanie normalnej ekspozycji z zerowym czasem naświetlania. Pole wyrównujące (*flat field*) to prosta mapa względnej czułości każdego piksela w detektorze. Pole takie tworzy się przez zrobienie zdjęcia jednolicie oświetlonej powierzchni. Poza tym, nawet podczas braku światła, piksele w kamerze CCD zbierają sygnał, który jest proporcjonalny do czasu ekspozycji (prąd ciemny). W spektrografach stosowane są kamery schładzane do niskich temperatur, dzięki czemu przyczynę od prądu ciemnego jest niewielki, zatem możemy go zaniedbać.

Do redukcji widm użyto pakietu *IRAF*, służącego do obróbki danych CCD. Większość procedur redukcyjnych została wykonana przy użyciu skryptów autorstwa K. Kamińskiego, zawierających kolejno specjalistyczne komendy (*taski*) i zadane parametry wejściowe potrzebne do następnych kroków redukcji.

Obróbka wstępna widm polegała na odjęciu poziomego zerowego *bias* (utworzenie *master bias frame* i odjęcie jej od każdego widma) i korekcji na *flat field* (utworzenie *master flat frame* i uwzględnienie jej przy każdym widmie).

Etapy redukcji widma

Procedura redukcyjna przeprowadzona została w sposób następujący:

1. Tracing

Określenie trasy, jaką biegnie widmo (tzw. ślad widma). Rzędy widma nie przebiegają dokładnie równoległe do pikseli na detektorze. Należy wyznaczyć maksima profili Gaussa dla punktów wzdłuż kierunku dyspersji. Łącząc te maksima poprzez dopasowanie odpowiedniego wielomianu, otrzymujemy trasę, jaką przebiega widmo.

Wykorzystany został task *apall* pakietu *IRAF*.

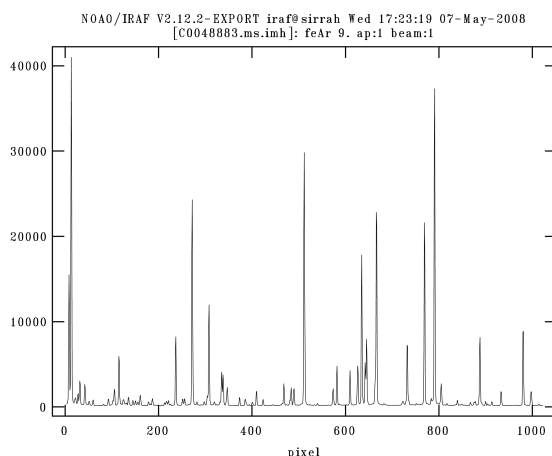
2. Ekstrakcja

Sumowanie sygnału wzdłuż kolumn prostopadle do kierunku dyspersji. Zarówno widmo obiektu, jak i widmo lampy kalibracyjnej zapisujemy jako zależność natężenia od numeru piksela.

Przykładowe widmo lampy kalibracyjnej (FeAr) znajduje się na rysunku 4.1.

3. Lokalizacja i identyfikacja linii w widmie lampy kalibracyjnej

W wyekstrahowanym widmie lampy kalibracyjnej (widmo lampy żelazowo - argonowej FeAr) należy zidentyfikować kilka linii emisyjnych przypisując im odpowiadające długości fali.



Rysunek 4.1: Widmo lampy kalibracyjnej żelazowo - argonowej jako zależność natężenia od numeru piksela (źródło: IRAF).

Wykorzystany został task `identify` do identyfikacji linii w widmie lampy porównania.

4. Wyznaczenie transformacji $x \rightarrow \lambda$

W oparciu o znane współrzędne linii emisyjnych w widmie lampy kalibracyjnej wyznaczone w pikselach oraz odpowiadające im laboratoryjne długości fal, można wyznaczyć transformację między współrzędną w pikselach, a współrzędną w długości fali w postaci wielomianu n -tego stopnia.

Ten krok jest także realizowany przez task `identify`.

5. Kalibracja widm obiektu w długości fali

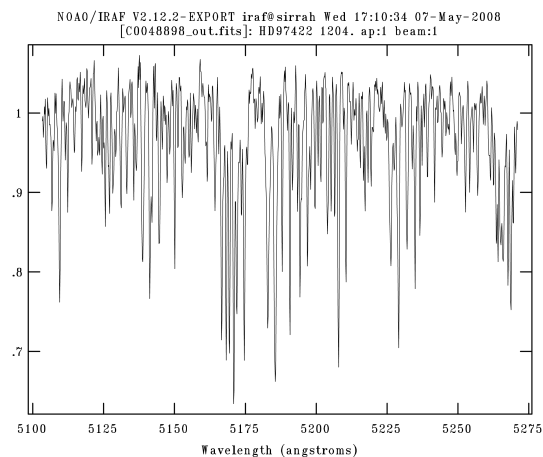
W oparciu o wyznaczoną transformację $x \rightarrow \lambda$ uzyskane widma lampy kalibracyjnej i widma gwiazdy można wyrazić w jednostkach długości fali.

Do przeniesienia dopasowanego wielomianu zawierającego informacje o dyspersji z widma porównania (FeAr) na widmo obiektu użyto tasku `dispcor`.

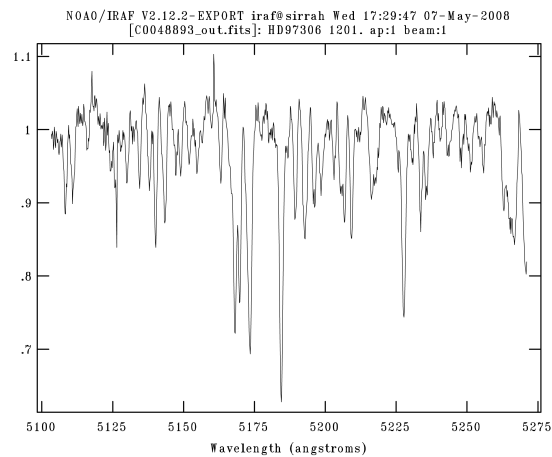
W efekcie otrzymujemy zależność natężenia od długości fali zarówno dla widma porównania, jak i dla widma obiektu (rysunki 4.2 i 4.3).

4.2.2 Wyznaczanie prędkości radialnych

Zredukowane widma można wykorzystać do pomiarów prędkości radialnych na podstawie badania zmian położenia linii widmowych. Prędkości radialne składników układu zostały wyznaczone przy użyciu dwóch metod korelacji krzyżowej



Rysunek 4.2: Widmo FM Leo. Widoczne podwojenie linii (źródło: IRAF).

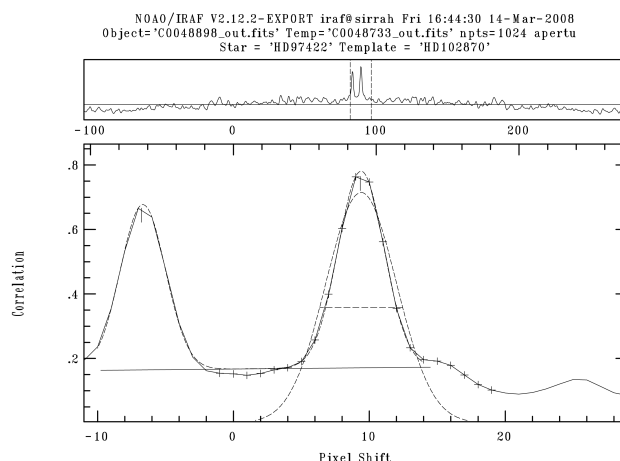


Rysunek 4.3: Widmo FK Leo (źródło: IRAF).

opisanych w rozdziale trzecim. Są to: metoda korelacji jednowymiarowej i dwuwymiarowej - TODCOR.

Metoda korelacji jednowymiarowej

Pierwsza z metod wyznaczania prędkości radialnych, która została użyta to korelacja krzyżowa jednowymiarowa. Jako widmo odniesienia w przypadku obu badanych układów posłużyło widmo gwiazdy HD102870 o typie widmowym F9V wykonane tej samej nocy obserwacyjnej co widmo obiektu. Do wyznaczenia wartości funkcji korelacji (CCF) oraz obliczenia prędkości wykorzystany został task `fxcor` znajdujący się w podpakiecie `IRAF`a `noao.rv`. Umożliwia on dobranie poziomu tła, dopasowanie profilu do przebiegu funkcji oraz wyznaczenie wartości



Rysunek 4.4: Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu `fxcor` dla FM Leo. Widoczne dwa piki korelacyjne świadczące o podwójności układu (źródło: IRAF).

prędkości radialnych dla obu składników. Przykładowy przebieg CCF uzyskanej tą metodą przedstawia rysunek 4.4.

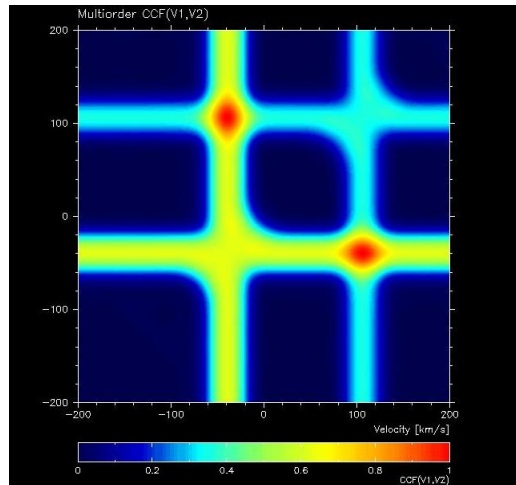
Gdy piki korelacji znajdują się stosunkowo blisko siebie (prędkości składników mają zbliżoną wartość) należy wykonać deblending (rozdzielenie) maksimów. Task `fxcor` umożliwia wykonanie tego zadania poprzez zaznaczenie dwóch pików korelacji i dopasowanie do nich odpowiednich profili.

Widma z fazy zaćmień należy pominąć w procesie wyznaczania prędkości radialnych ze względu na trudności w rozróżnieniu dwóch maksimów funkcji korelacji (nakładanie się pików) i możliwy znaczny błąd w wyniku.

Metoda korelacji dwuwymiarowej TODCOR

Jako drugi sposób wyznaczania prędkości radialnych składników układu użyto metodę korelacji dwuwymiarowej TODCOR. Widmem odniesienia uczyniono jedno widmo syntetyczne wygenerowane na podstawie modeli Kurucza (1979) dla metaliczności Słońca i temperatury 6400 K. Dla obu przypadków obrano inną wartość prędkości rotacji dla widma syntetycznego świadcząca o stopniu poszerzenia linii (FM Leo: $v_{rot} = 30$ km/s, FK Leo: $v_{rot} = 2$ km/s).

Do obliczenia wartości funkcji korelacji, stworzenia map prędkości radialnych i wyznaczenia ich wartości użyto programu autorstwa M. Konackiego. Przykładowa mapa znajduje się na rysunku 4.5. Przedstawia zmiany funkcji korelacji (o jej wartości świadczy kolor) na płaszczyźnie dwóch prędkości radialnych (oś rzędnych i odciętych). Współrzędne maksimum funkcji odpowiadają szukanym wartościom prędkości. Mapa przedstawia dwa maksima mające te same współrzędne jednak brane pod uwagę jest tylko jedno z nich, a wyświetlanie dwóch



Rysunek 4.5: Metoda korelacji krzyżowej dwuwymiarowej TODCOR w praktyce. Opis znajduje się w tekście.

pików jest powiązane z matematycznym opisem funkcji CCF, która daje dwa rozwiązania.

Poprawka na ruch obserwatora względem układu barycentrycznego została uwzględniona poprzez użycie tasku *IRAF*a *rvcorrect* wyznaczającego prędkość heliocentryczną na zadany moment dla współrzędnych obiektu obserwowanego, którą należało dodać do wyniku uzyskanego wcześniej.

4.3 Modelowanie układów

Aby wyznaczyć parametry układu podwójnego zaćmieniowego z obserwacji potrzebujemy modelu, który opisuje wpływ tych parametrów na kształt krzywych zmian blasku i prędkości radialnych. Posiadając taki model jesteśmy w stanie zmieniając wartości parametrów układu wirtualnego uzyskać zgodność krzywych wirtualnych i obserwowanych.

4.3.1 Metoda WD

Jedną z metod umożliwiającą modelowanie układów podwójnych zaćmieniowych na podstawie dopasowania modelu do dwóch zestawów danych obserwacyjnych: krzywej zmian blasku i prędkości radialnych jest kod Wilsona - Devinneya (WD) stworzony w 1971 roku (Wilson & Devinney, 1971). W metodzie tej korzysta się z rozbudowanego modelu Roche'a, przyjmującego następujące założenia (Kallrath & Milone, 1999):

- pole grawitacyjne układu jest wytwarzane przez dwie punktowe masy opisujące pole obu składników,
- kształt składników układu jest opisany przez wpływ chwilowego pola sił (nie uwzględnia się nieradialnych oscylacji, przyjmując, że są one zaniedbywalne w porównaniu z okresem orbitalnym),
- gwiazdy rotują wokół swych osi z zachowaniem praw fizyki ciała sztywnego (bez uwzględnienia rotacji dyferencjalnej).

Model podstawowy - geometria układu

Poniższe rozważania opierają się na informacjach zaczerpniętych z *PHOEBE - Scientific Reference* (Prsa, 2006).

W metodzie zastosowano rotujący układ odniesienia, początek którego umiejscowiony jest w środku składnika o większej masie, a oś X skierowana w stronę drugiej gwiazdy. Układ jest nieinercyjny, występują więc w nim siły bezwładności. Prędkość kątowna rotacji takiego układu wynosi:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}}. \quad (4.1)$$

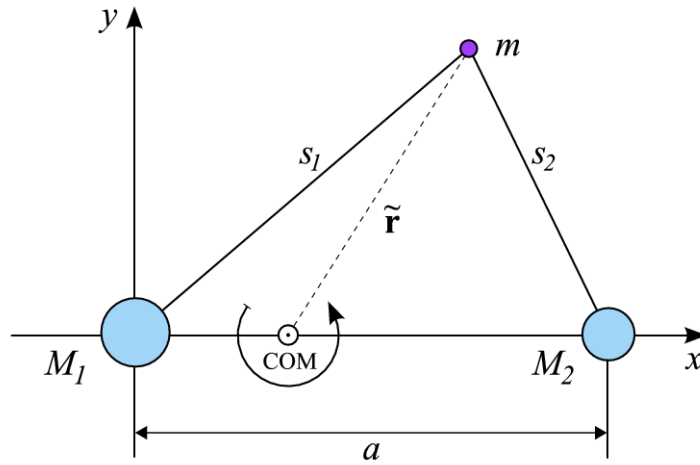
Siła decydująca o kształcie składników układu jest wypadkową sił grawitacyjnych pochodzących od obu składników oraz sił odśrodkowych związanych ze środkiem mas układu wokół którego rotuje on z prędkością ω . Potencjał powstałego pola określony jest wzorem (Kopal, 1959):

$$-\Psi = G\frac{M_1}{s_1} + G\frac{M_2}{s_2} + \frac{\omega^2}{2}\tilde{r}^2, \quad (4.2)$$

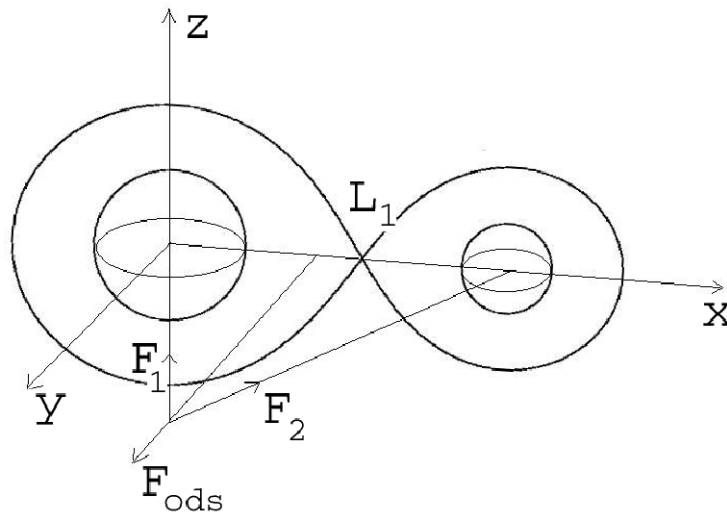
gdzie \tilde{r} jest wartością wektora łączącego środek masy układu z cząstką próbną (rysunek 4.6), czyli określającego odległość do barycentrum układu, M_1 i M_2 - masami składników, a s_1 i s_2 odpowiednio odległościami od cząstki do środków gwiazd o tych masach.

W pobliżu gwiazd ich pole grawitacyjne ma decydujący wpływ na potencjał, z kolei w większej odległości od składników główną rolę przejmuje siła odśrodkowa. Jeżeli w pobliżu układu znajduje się cząstka próbna, wówczas jej ruch określony jest przez te trzy siły (rysunek 4.7).

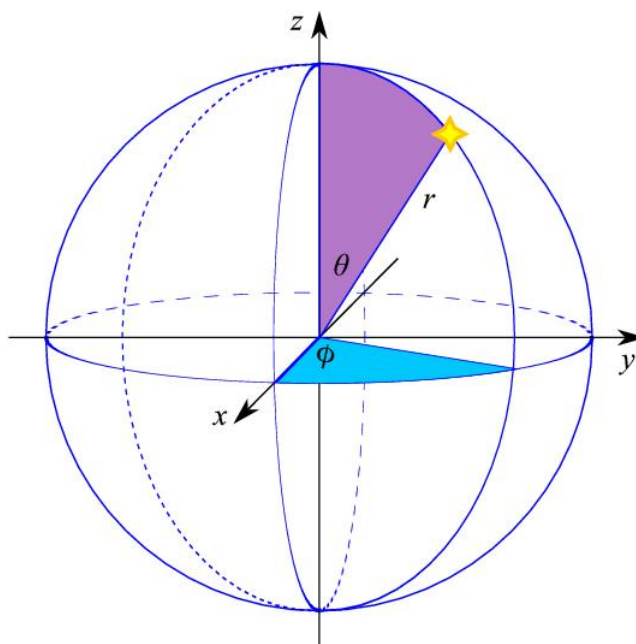
Gwiazdy ograniczone są powierzchniami o pewnych potencjałach, które nazywamy potencjałami powierzchniowymi. Oba składniki otoczone są owalnymi strefami, łączącymi się w punkcie Lagrange'a L_1 , które tworzą powierzchnię ograniczającą zwaną powierzchnią Roche'a. Określa ona maksymalny rozmiar pojedynczych składników. Wewnątrz tych stref decydującą rolę odgrywa grawitacja. Trzecia strefa otacza pierwsze dwie, a powierzchnia ją ograniczająca przechodzi przez punkt Lagrange'a L_2 . Określa ona maksymalny możliwy rozmiar układu



Rysunek 4.6: Geometria układu podwójnego. Początek układu współrzędnych znajduje się w środku gwiazdy o masie M_1 . COM oznacza środek masy, a - odległość między składnikami, s_1 i s_2 odległości pomiędzy środkami gwiazd a cząstką próbną o masie m . Wektor $\tilde{\mathbf{r}}$ łączy środek masy z cząstką m (Prsa, 2006).



Rysunek 4.7: Układ odniesienia w rozpatrywanym zagadnieniu układu podwójnego. Środek układu znajduje się w środku gwiazdy o większej masie, L_1 oznacza punkt Lagrange'a. Siły F_1 i F_2 to siły grawitacyjne pochodzące od obu składników, F_{ods} - siła odśrodkowa skierowana wzdłuż linii łączącej środek masy układu z cząstką próbną (Dimitrov, 2007).



Rysunek 4.8: Prawoskrętny układ współrzędnych sferycznych dla rozważanego zagadnienia. Kąt biegunowy θ może przyjmować wartości od 0° na biegunie $+z$ do 180° na biegunie $-z$, kąt azymutalny ϕ przyjmuje wartości od 0° na osi x do 360° (Prsa, 2006).

ponadkontaktowego. Strefa czwarta to cała przestrzeń pozostała. Wewnątrz niej siły odśrodkowe przewyższają grawitację, a materia gwiazdy, która by się tam znalazła, stopniowo oddalałaby się od układu. Strefy potencjału dla układu podwójnego ukazane są na rysunkach 4.9 i 4.10.

Przejdźmy do układu współrzędnych sferycznych (rys. 4.8), zakładając, że

$$x = r \sin \theta \cos \phi = \lambda r, \quad (4.3)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi = \mu r, \quad (4.4)$$

$$z = r \cos \theta = \nu r. \quad (4.5)$$

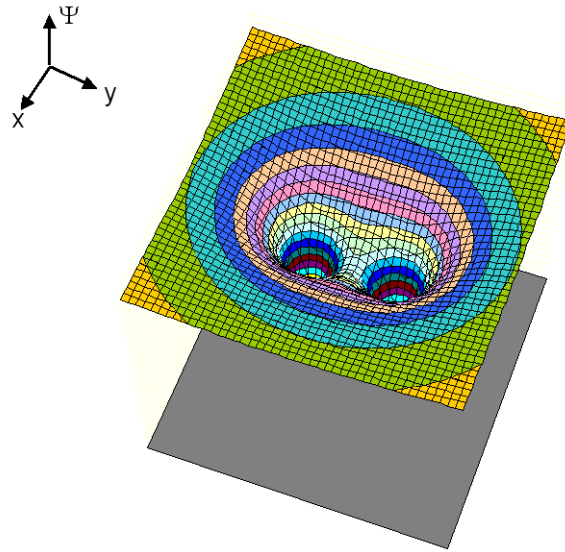
Zdefiniujmy także położenie środka mas układu (ang. *Centre Of Mass*, COM), jako

$$x_{COM} = \frac{\sum_i M_i x_i}{\sum_i M_i} = \frac{qa}{1+q}, \quad (4.6)$$

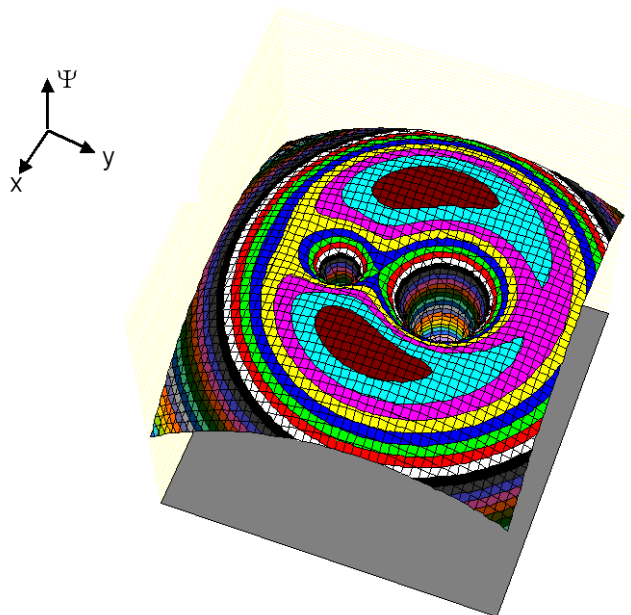
gdzie $q = M_2/M_1$ oznacza stosunek mas, a odległość między składnikami układu oznaczona jest przez a .

Zakładając, że

$$s_1 = r, \quad (4.7)$$



Rysunek 4.9: Strefy Roche'a dla dwóch gwiazd niebędących w ruchu (kolor odpowiada strefie o określonym zakresie potencjału) (Bruton, 2004).



Rysunek 4.10: Strefy Roche'a dla dwóch gwiazd o różnych masach obiegających środek masy układu (kolor odpowiada strefie o określonym zakresie potencjału) (Bruton, 2004).

$$s_2 = \sqrt{r^2 - 2xa + a^2}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{r} = \sqrt{(x - x_{COM})^2 + y^2}, \quad (4.9)$$

potencjał pola (równanie 4.2) przyjmuje postać

$$\Psi(r, \lambda, \nu) = -\frac{GM_1}{r} - \frac{GM_2}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{1}{2}\omega^2 \left(r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda x_{COM} + x_{COM}^2 \right). \quad (4.10)$$

Używając równań na środek masy (4.6) oraz prędkość kątową rotacji (4.1) uzyskujemy wyrażenie

$$\Psi(r, \lambda, \nu) = -\frac{GM_1}{a} \left[\frac{a}{r} + q \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{r\lambda}{a} \right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} (1+q)(1-\nu^2) + \frac{1}{2} \frac{q^2}{1+q} \right]. \quad (4.11)$$

Używany w metodzie WD bezwymiarowy, znormalizowany i przyjmujący założenie, że odległość między środkami gwiazd jest równa $a = 1$, potencjał Roche'a Ω jest zdefiniowany jako:

$$\Omega = -\frac{\Psi a}{GM_1} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{q+1}, \quad (4.12)$$

Podstawiając do powyższego równania definicję Ψ z równania 4.11 uzyskamy zatem wyrażenie

$$\Omega(r, q) = \frac{1}{r} + q \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda r + r^2}} - \lambda r \right] + \frac{1}{2} (q+1) r^2 (1 - \nu^2). \quad (4.13)$$

Równania tego używamy do znalezienia rozmiarów i kształtu składników układu o rotacji synchronicznej i orbitach kołowych. Każdy ze składników określony jest czterema promieniami R_{point} , R_{side} , R_{back} , R_{pole} , skierowanymi odpowiednio do L_1 , boku, tyłu i bieguna układu. Odpowiednie wartości kątów ϕ i θ dla promieni przedstawia tabela 4.1.

	ϕ	θ
R_{point}	0	90
R_{side}	90	90
R_{back}	90	180
R_{pole}	0	90

Tabela 4.1: Kąty określające cztery promienie składnika.

Na podstawie równania 4.13 możemy wyznaczyć rozmiary pierwszego składnika. W celu oszacowania promieni drugiego, musimy "zamienić" miejscami oba składniki, tak aby drugi znalazł się w środku układu odniesienia. W praktyce wystarczy wyznaczyć Ω'_2 oraz q' (równanie 4.14) i wstawić do równania 4.13:

$$\Omega'_2 = \Omega_2 \cdot q' + \frac{1}{2} (1 - q'), \quad (4.14)$$

gdzie

$$q' = \frac{1}{q}. \quad (4.15)$$

Rotacja asynchroniczna

W przypadku rotacji synchronicznej materia gwiazdy pozostaje w spoczynku względem ograniczającej ją powierzchni ekwipotencjalnej. Jeśli jednak okres jednego ze składników jest krótszy niż orbitalny następuje zmiana sił odśrodkowych związana z osią rotacji samego składnika. Gwiazda zatem rotuje względem ograniczającej ją powierzchni ekwipotencjalnej. Jeśli gwiazda jest rozciągnięta pływami, punkt na jej powierzchni będzie wykonywał ruchy radialne w górę i w dół. Powoduje to, że dla gwiazd mocno zniekształconych następuje szybka synchronizacja rotacji składnika z ruchem orbitalnym (Zahn, 1975, 1977). Dodatkowe siły odśrodkowe powodują spłaszczenie składnika przy biegunach. Przyjmując F jako parametr synchronizacji definiowany jako stosunek okresu obrotu do okresu orbitalnego

$$F = \frac{P_{os}}{P_{orb}}, \quad (4.16)$$

potencjał możemy określić jako

$$\Omega(r, q) = \frac{1}{2} + q \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda r + r^2}} - \lambda r \right] + \frac{1}{2} F^2 (q + 1) r^2 (1 - \nu^2). \quad (4.17)$$

Orbity eliptyczne

W przypadku orbit kołowych kształt powierzchni ekwipotencjalnych jest stały. W rzeczywistości (zwłaszcza dla składników o większej separacji) często orbity przyjmują kształt eliptyczny. Gwiazdy o małej wzajemnej odległości mają zazwyczaj orbity kołowe powstałe poprzez działanie sił pływowych, które powodują dysypację energii niesynchronicznej rotacji w skali czasu porównywalnej z termiczną (Zahn, 1975, 1977). Odległość a między składnikami dla orbit eliptycznych jest funkcją fazy ruchu orbitalnego i podlega okresowym zmianom. Powoduje to również okresowe zmiany kształtu i rozmiarów powierzchni ekwipotencjalnych, krytycznej powierzchni Roche'a i samych gwiazd. Eliptyczność orbity opisujemy spłaszczeniem e . Potencjał jest wówczas wyznaczany jako:

$$\Omega(r, q, a) = \frac{1}{r} + q \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2\lambda ar + r^2}} - \frac{\lambda r}{a^2} \right] + \frac{1}{2} F^2 (q + 1) r^2 (1 - \nu^2). \quad (4.18)$$

Rozkład jasności na powierzchni gwiazdy

Czynniki, które musimy uwzględnić, aby opisać rozkład jasności na powierzchni gwiazdy oraz wpływające na promieniowanie w różnych zakresach częstotliwości to:

- model rozkładu widmowego promieniowania,
- pociemnienie brzegowe,
- wyjaśnienie grawitacyjne,
- efekt odbicia,
- plamy na powierzchni składników,
- rozciągłość atmosfery (zaćmienia atmosferyczne).

Aby określić w jaki sposób gwiazda promieniuje w różnych zakresach częstotliwości musimy przyjąć pewien model. W pierwszym przybliżeniu może to być ciało doskonale czarne. Znacznie bardziej dokładny jest model uwzględniający fizykę atmosfer i lepiej odzwierciedlający widma gwiazd rzeczywistych.

Aby wyznaczyć jaki jest rozkład promieniowania musimy znać temperaturę gwiazdy. Dla obiektu sferycznego temperatura na całej powierzchni jest taka sama. Gwiazda odkształcona siłami odśrodkowymi lub siłami pływowymi posiada wyższą temperaturę w obszarach o wyższym lokalnym przyspieszeniu grawitacyjnym $g \sim T$. Efekt ten nazywamy pociemnieniem grawitacyjnym.

Znając rozkład temperatur na powierzchni gwiazdy możemy określić monochromatyczną jasność powierzchniową uwzględniając pociemnienie brzegowe. Obserwator widzi głębsze warstwy w środku gwiazdy, niż na jej brzegach. Warstwy głębsze mają wyższą temperaturę, co oznacza, że środek tarczy jest jaśniejszy niż jej brzegi.

Pary zaćmieniowe są zazwyczaj stosunkowo ciasnymi układami. Składniki oświetlają się nawzajem, co powoduje wzajemne podgrzewanie składników. Ogrzewana jest tylko półsfera oświetlona przez drugi składnik. Wypromieniowany nadmiar ciepła daje wkład do krzywej zmian blasku. Zjawisko to nazywamy efektem odbicia (refleksu). Nie jest ono wywołane odbiciem promieniowania, lecz zachodzi na skutek podgrzania. Tylko w przypadku gwiazd bardziej gorących nazwa ta jest trafniejsza, bowiem dla nich możliwe jest rozpraszanie na elektronach w zewnętrznych częściach atmosfery. Efekt odbicia jest modelowany przy pomocy parametru albedo, określającego jaka część energii promieniowania padającego zostaje z powrotem wypromieniowana. Kolejnym istotnym efektem jest przepływ ciepła z obszarów podgrzanych do chłodniejszych.

Niektóre układy zaćmieniowe posiadają zniekształcone krzywe blasku, w sposób taki, że widoczna jest różnica w poziomie maksimów. Może to być spowodowane dużymi plamami na powierzchni gwiazdy. Jeżeli zniekształcenie krzywej pojawia się zawsze w tej samej fazie, oznacza to, że zachodzi synchroniczny ruch składnika z plamą. Plamy mogą mieć niższą, lub wyższą temperaturę niż powierzchnia otaczająca.

Krzywe zmian blasku i prędkości radialnych

Znając równania opisujące kształt, rozmiary, rozkład jasności na powierzchni składników i nachylenie orbity, jesteśmy w stanie odtworzyć krzywą zmian blasku układu.

Aby wygenerować krzywą prędkości radialnych na podstawie znanych prędkości orbitalnych i nachylenia orbity możemy zastosować prosty model, w którym gwiazdę zastępujemy punktowym źródłem światła. Dla kołowych orbit o nachyleniu $i = 90^\circ$ obserwowana prędkość radialna

$$V_{obs} = V_{orb} \sin \phi, \quad (4.19)$$

gdzie ϕ jest fazą ruchu orbitalnego. Jeśli nachylenie jest mniejsze musimy uwzględnić dodatkowy rzut wektora prędkości, zatem prędkość obserwowana wynosi:

$$V_{obs} = V_{orb} \sin \phi \sin i. \quad (4.20)$$

Wykreślając tę funkcję dla obu składników otrzymujemy dwie sinusoidy przesunięte w fazie o π . W fazach zaćmień (0 i 0.5) uzyskujemy (odejmując prędkość całego układu) zerowe prędkości radialne, w fazach 0.25 i 0.75 - maksymalne. Dla gwiazd ciągu głównego wiemy, że temperatura rośnie wraz ze wzrostem masy. W przypadku układów, których składniki leżą na ciągu głównym oznacza to, że składnik pierwszy o wyższej temperaturze ma większą masę. W takiej sytuacji ten składnik ma krzywą RV o mniejszej amplitudzie K_1 . Stosunek mas wynosi $q = K_1/K_2$.

Na podstawie modelu źródła punkowego możemy pokazać ideę wyznaczania podstawowych parametrów z krzywej RV. Jeżeli posiadamy obserwacje spektroskopowe układu, w których są widoczne linie obu składników możemy uzyskać krzywe ich prędkości radialnych. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów możemy dopasować do nich dwie sinusoidy, wyznaczając w ten sposób amplitudy K_1 i K_2 oraz prędkość radialną układu zaćmieniowego (środką masy) względem Słońca. Stosunek mas wyznaczamy z zależności $q = K_1/K_2$. Półś wielką układu określamy jako

$$a \sin i = (K_1 + K_2) \cdot P \cdot 0.01976, \quad (4.21)$$

gdzie jednostką okresu P jest doba, amplitudy $K_{1,2}$ km/s, a uzyskany wynik ma wymiar jednostek promieni Słońca R_\odot . Jeżeli znamy wartość nachylenia orbity z fotometrii to dzieląc uzyskany wynik przez $\sin i$ otrzymujemy półś wielką $a [R_\odot]$. Masy składników w jednostkach mas Słońca możemy uzyskać korzystając ze wzoru

$$M_{1,2} = \frac{1.038 \cdot 10^{-7} (K_1 + K_2)^2 \cdot K_{1,2} \cdot P}{\sin^3 i}. \quad (4.22)$$

Mimo dobrego pierwszego przybliżenia gwiazdy modelem źródła punkowego, należy uwzględnić fakt, że składniki układu nie są takimi źródłami promieniowania, lecz obiektami niesferycznymi o niejednorodnym rozkładzie jasności na powierzchni. Różnice w wyznaczonych amplitudach prędkości mogą wynosić kilka

procent. Aby wyznaczyć dokładnie krzywe prędkości radialnych musimy znaleźć średnią prędkość pochodzącą od wszystkich widocznych (niezaćmionych) elementów powierzchni ważoną ich jasnością. Oznacza to, że konieczne jest skorzystanie z dokładnych wzorów na kształt, rozmiary i rozkład jasności obu składników. Krzywa wyznaczona w ten sposób lepiej odpowiada danym obserwacyjnym i różni się od sinusoid modelu punktowego wartościami amplitud oraz zniekształceniami krzywej w okolicy zaćmień na skutek efektu Rossitera - McLaughlina (Rossiter, 1924), pojawiającego się w trakcie tranzytu jednego ze składników przez tarczę drugiego. Gwiazdy rotują wokół własnych osi i w trakcie zaćmienia widzimy różne części gwiazdy zakrywanej. Jeżeli widzimy tę część tarczy, która na skutek rotacji zbliża się do nas (część oddalająca się jest zakryta przez drugą gwiazdę) obserwujemy obniżoną prędkość radialną. Z kolei jej wzrost zauważalny jest w przypadku odwrotnym.

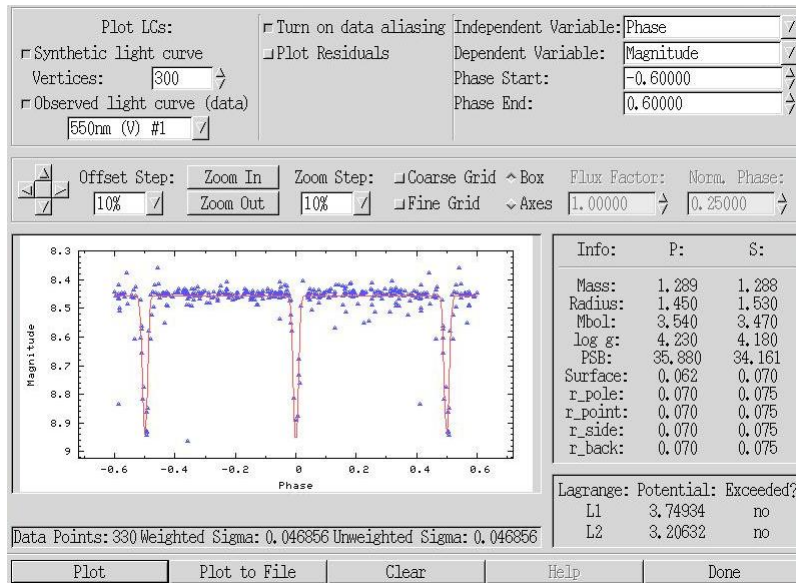
4.3.2 Program PHOEBE

Modelowanie układów podwójnych przeprowadzono z wykorzystaniem programu *PHOEBE*³ (*PHysics Of Eclipsing BinariEs*, Prsa, 2006) bazującego na metodzie WD. Program korzysta z jednej z nowszych wersji kodu numerycznego z roku 1998 (WD98). *PHOEBE* posiada rozbudowany interfejs graficzny (rysunek 4.11) pozwalający na przyspieszenie procesu modelowania oraz umożliwiającą natychmiastowe porównanie krzywych syntetycznych i obserwowanych, a także uzyskanie trójwymiarowego obrazu układu.

Program *PHOEBE* wykorzystuje do analizy dane obserwacyjne uzyskane z krzywych LC i RV oraz zestaw parametrów opisujących układ, które zostają użyte jako punkt startowy w procesie modelowania:

- temperatury efektywne obu składników T_1, T_2 [K],
- data juliańska momentu minimum głównego $Min I$ [HJD],
- okres układu P w dniach [d],
- półoś wielka orbity a w jednostkach promieni Słońca [R_\odot],
- stosunek mas składników $q = M_2/M_1$,
- nachylenie orbity i w stopniach,
- bezwymiarowe potencjały na powierzchniach obu gwiazd Ω_1, Ω_2 , które zależą głównie od stosunku mas, promienia i odległości składników
- bezwymiarowe jasności składników układu L_1 i L_2 w danym paśmie fotometrycznym przy założeniu, że $L_1 + L_2 = L = 1$ lub przeliczone na jednostki odpowiadające jednostkom danych wejściowych (krzywa LC),

³program dostępny pod adresem <http://phoebe.fiz.uni-lj.si/>



Rysunek 4.11: Wygląd interfejsu graficznego programu *PHOEBE*. Widoczne okno dopasowania krzywej zmian blasku dla FM Leo.

- przyspieszenia grawitacyjne na powierzchniach obu gwiazd $\log g_1$, $\log g_2$ wyrażone w jednostkach cgs.

Najistotniejszymi parametrami są okres układu P oraz data juliańska momentu minimum głównego $Min I$. Te dwie wartości należy podać, by program przeprowadził poprawnie sfazowanie danych. Inne parametry mogą zostać domyślnie przyjęte przez program po podaniu informacji o typie modelowanego układu (rozdzielony, kontaktowy itp.).

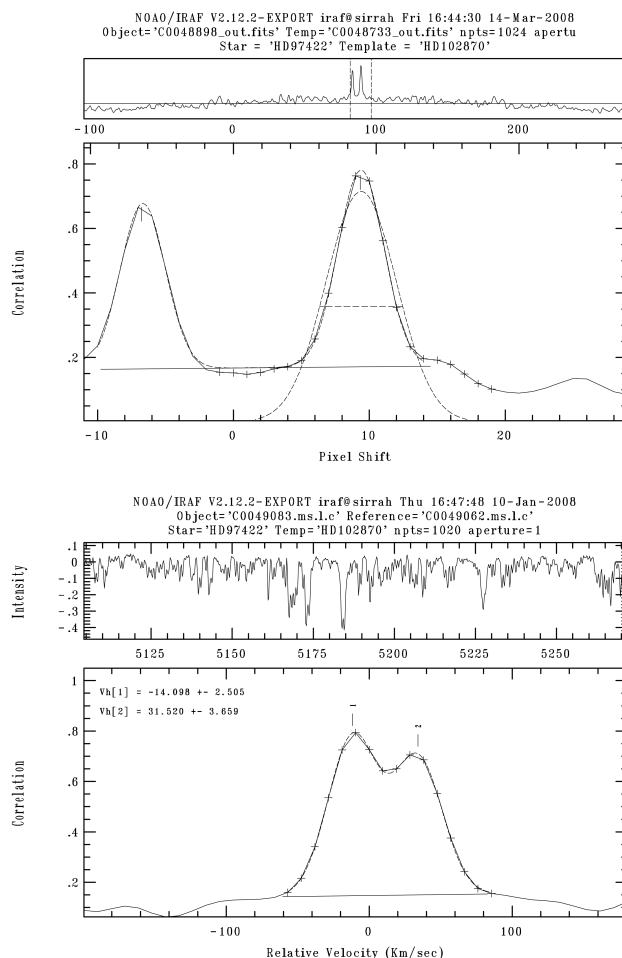
4.4 Wyniki

4.4.1 FM Leo

Dane o układzie

Układ FM Leo jest rozdzielonym układem podwójnym. Był obserwowany przez satelitę Hipparcos (HIC 54766), dzięki czemu wyznaczono dla niego paralaksę trygonometryczną: $8.35 \pm 1.17 \text{ mas}$. Jasność układu w maksimum wynosi $V=8^m.464 \pm 0.016$ (Perryman et al., 1997), a wartość wskaźnika barwy $B-V=0.462 \pm 0.021$. Dostępna krzywa zmian blasku pochodzi z przeglądu ASAS (*All Sky Automated Survey*; Pojmański, 1997) i zawiera dwa minima niemalże jednakowej głębokości. Sugeruje to, iż układ składa się z dwóch bardzo podobnych, rozdzielonych składników. Okres zmian blasku wynosi $P=6^d.72856$ (Kre-

iner, 2004). Typ widmowy układu sklasyfikowano jako F8. W literaturze nie ma informacji na temat wcześniejszych obserwacji spektroskopowych tego obiektu.

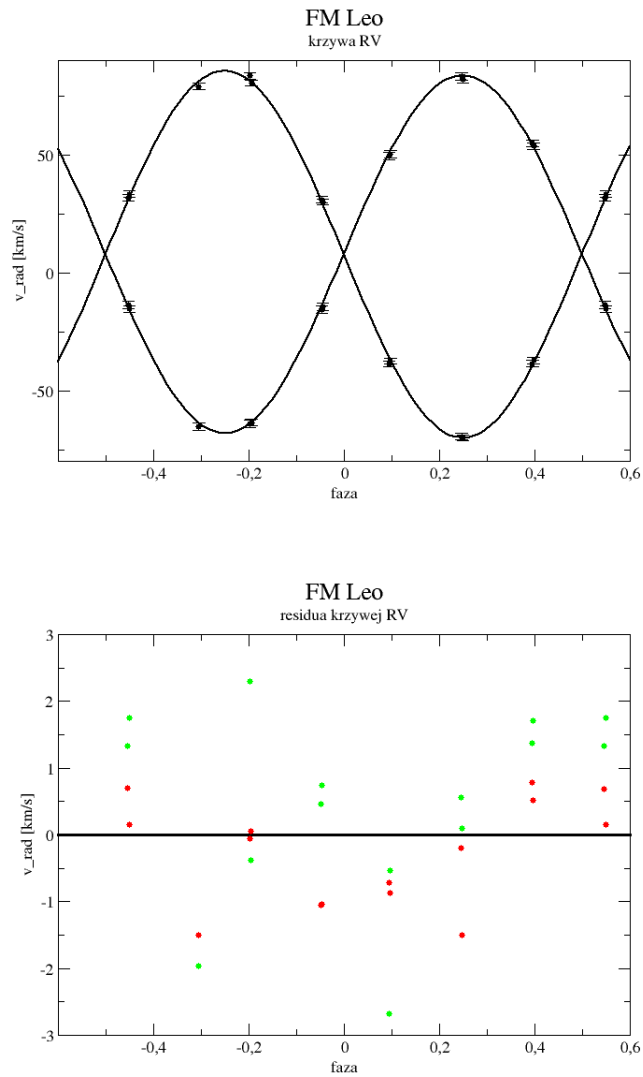


Rysunek 4.12: Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu `fxcor` dla FM Leo. Widoczne dwa piki korelacyjne świadczące o podwójności układu. Dolny wykres przedstawia piki o zbliżonej wartości prędkości (zbliżające się do fazy zaćmienia) (źródło: IRAF).

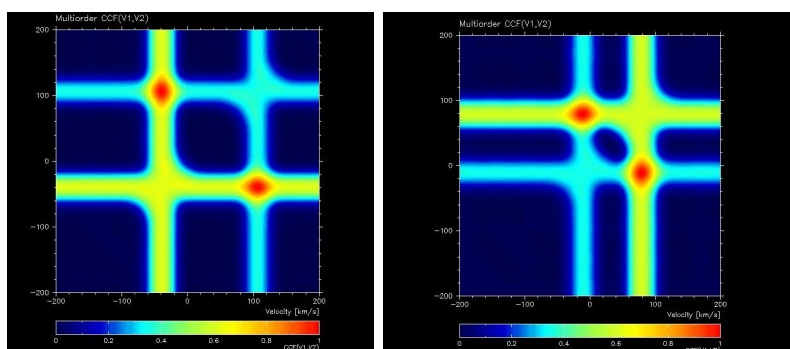
Materiał obserwacyjny

Do stworzenia modelu układu konieczne było wykonanie widm. Pochodzą z obserwatorium DDO (Kanada), z 7 nocy okresu przełomu kwietnia i maja 2006 roku (obserwator: T. Kwiatkowski). Zostały wykonane przy pomocy 1.9 metrowego teleskopu ze spektrografem umieszczonym w ognisku Cassegraina. Czas naświetlania widm wynosił 20 minut. Obserwacje zostały wykonane w zakresie widmowym 5100 - 5275 Å.

Krzywa zmian blasku pochodzi z przeglądu nieba ASAS (*All Sky Automated Survey*; Pojmański, 1997). Dostępna fotometria została wykonana w filtrze V. Po dopasowaniu syntetycznej krzywej do danych obserwacyjnych uzyskano średnią kwadratową (RMS) dopasowania $\sigma = 0.05$ mag.



Rysunek 4.13: Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla FM Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla FM Leo. Średni błąd formalny pomiaru wynosi $\sigma_f = 0.017$ mag.



Rysunek 4.14: Zastosowanie metody korelacji krzyżowej dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo.

Wyniki

Wyznaczenie wartości prędkości radialnych za pomocą metody korelacji jednowymiarowej opierało się na użyciu wcześniej opisanych procedur pakietu *IRAF*. Uzyskano dwa maksima funkcji CCF (rysunek 4.12), świadczące o obecności dwóch składników układu.

W wyniku pomiaru prędkości radialnych metodą korelacji jednowymiarowej uzyskano krzywe zmian prędkości radialnych przedstawione na rysunku 4.13. Średnia kwadratowa (RMS) dopasowania dla składnika głównego wynosi $\sigma_1 = 0.94$ km/s, dla wtórnego $\sigma_2 = 0.51$ km/s. Różnice między wartościami dopasowanymi, a obserwacjami (residua) przedstawiono na dolnym wykresie rysunku 4.13. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 1.32$ km/s, $\sigma_{f2} = 1.53$ km/s.

W celu weryfikacji błędów pomiarowych obliczono wartość χ^2 (Press et al., 2007)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{O_i - E_i}{\sigma_i} \right)^2, \quad (4.23)$$

gdzie O_i to wartość mierzona, E_i - wartość dopasowana, σ_i - błąd pomiaru, N - ilość pomiarów. Zgodnie z algorytmem postępowania błędy pomiaru zostały przeskalowane przez $\sqrt{\hat{\chi}^2}$, gdzie

$$\hat{\chi}^2 = \frac{\sqrt{\chi^2}}{N - M}, \quad (4.24)$$

tak by $\hat{\chi}^2 = 1$, gdzie M oznacza liczbę parametrów modelu, $N-M$ - liczbę stopni swobody, w wyniku czego wpływ niedoszacowania lub przeszacowania błędów pomiarowych na błędy parametrów został wyeliminowany.

Pomiar prędkości radialnych metodą korelacji dwuwymiarowej (TODCOR) potwierdził słuszność wcześniej uzyskanych wyników. Przykładowe mapy korelacji, jakie uzyskano w trakcie wykonywania pomiaru, ukazano na rysunku 4.14.

Krzywą zmian prędkości radialnych wyznaczonych metodą korelacji dwuwymiarowej przedstawiono na rysunku 4.15. Średnia kwadratowa (RMS) dopasowania dla składnika głównego wynosi $\sigma_1 = 0.93$ km/s, a dla składnika wtórnego $\sigma_2 = 0.62$ km/s. Rozrzut dopasowania modelu do obserwacji ukazano na dolnym wykresie rysunku 4.15. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 1.12$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 1.04$ km/s. Amplituda zmian prędkości radialnych dla składnika głównego wynosi $K_1 = 77.4$ km/s, z kolei dla składnika wtórnego $K_2 = 76.5$ km/s.

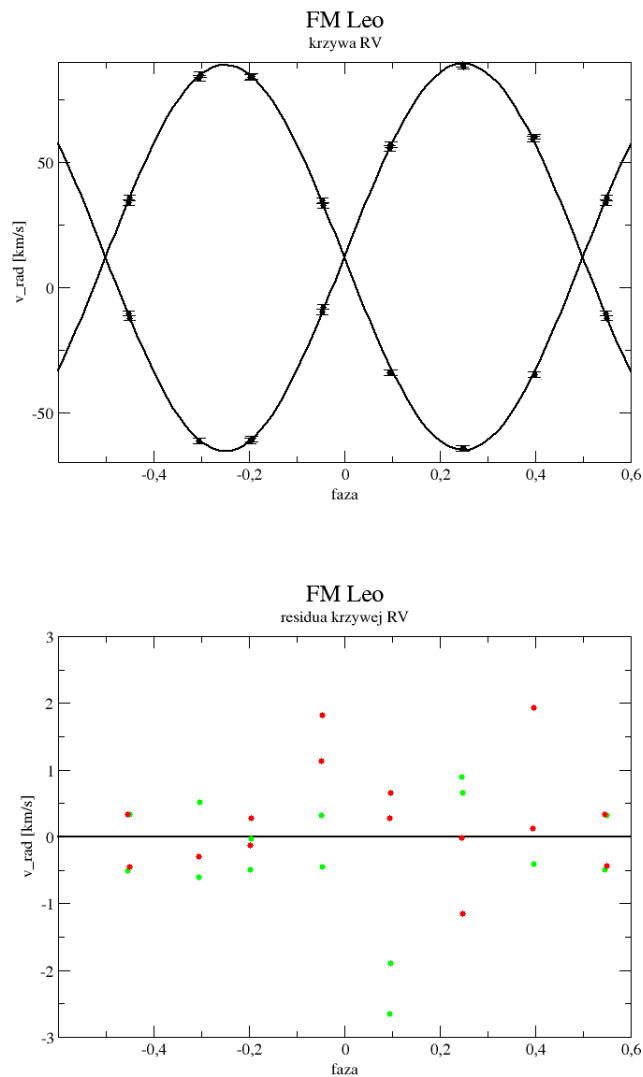
Dopasowanie krzywej zmian blasku do danych obserwacyjnych przedstawia wykres na rysunku 4.16. Widoczne są spadki jasności rzędu 0.5 mag dla obu minimów. Sugeruje to podobieństwo składników układu. Maksima krzywej są płaskie, co świadczy o kulistości gwiazd i braku zniekształceń. Średnia kwadratowa dopasowania krzywej LC do obserwacji wynosi $\sigma = 0.05$ mag. Residua dla krzywej zmian blasku układu FK Leo przedstawiono na dolnym wykresie 4.16. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.017$ mag.

Na podstawie krzywych zmian blasku i prędkości radialnych uzyskanych metodą TODCOR stworzono model układu. Jego składnikami są gwiazdy o masach $M_1 = 1.293 \pm 0.022 M_\odot$ i $M_2 = 1.286 \pm 0.022 M_\odot$ oraz promieniach równych odpowiednio $R_1 = 1.45 \pm 0.05 R_\odot$ i $R_2 = 1.53 \pm 0.05 R_\odot$. Półoś wielka układu została oszacowana na wartość $a = 20.55 \pm 0.09 R_\odot$, a nachylenie na $i = 88.09 \pm 0.20^\circ$. Prędkość radialna układu wynosi $V_\gamma = 11.88 \pm 0.23$ km/s, temperatury zaś $T_1 = 6400 \pm 145$ K i $T_2 = 6326 \pm 194$ K. Temperaturę składnika pierwszego oszacowano na podstawie wartości wskaźnika barwy (B-V), druga została dopasowana przez program *PHOEBE*.

Założony jako parametr wstępny okres $P = 6^d.72856$ (Kreiner, 2004) został poprawiony na wartość $P = 6^d.72882 \pm 0.00001$. Powodem było lepsze dopasowanie krzywych syntetycznych do obserwacji w przypadku zmodyfikowanej wartości okresu.

Uzyskane wartości parametrów układu przedstawia tabela 4.2.

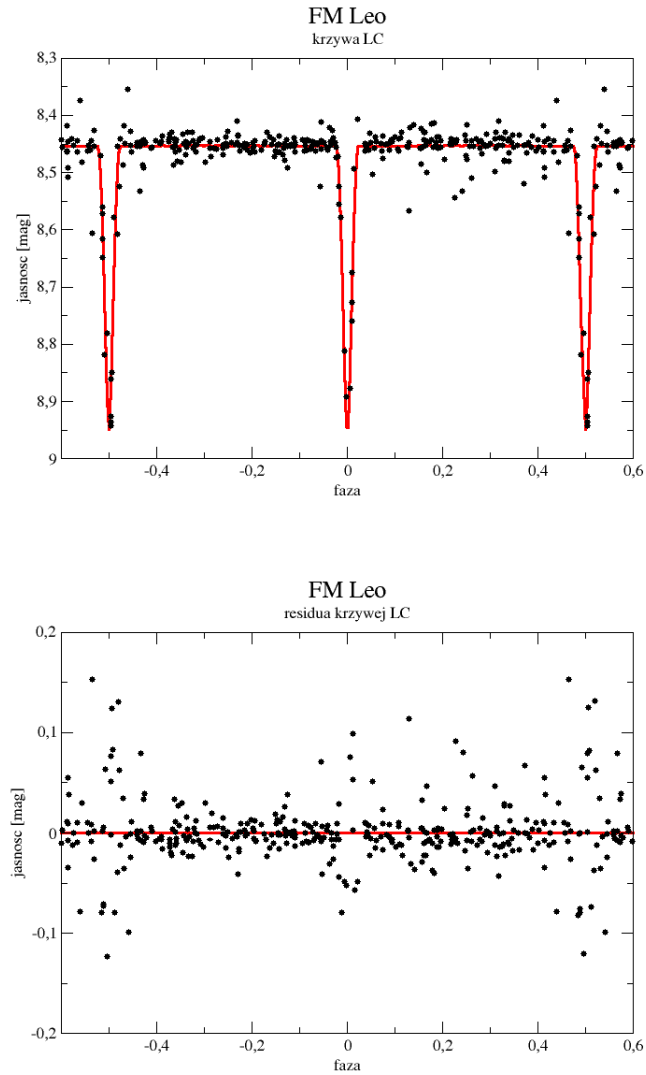
Trójwymiarowy model układu zobrazowano na rysunku 4.17.



Rysunek 4.15: Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo. Kolorem zielonym zaznaczono residua dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 1.12$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 1.04$ km/s.

Wyznaczenie wieku układu

W celu weryfikacji poprawności wyznaczonych parametrów przeprowadzono test polegający na sprawdzeniu czy oba składniki układu są tego samego wieku. Gwiazdy osadzono na ścieżkach ewolucyjnych odpowiadających ich masom oraz



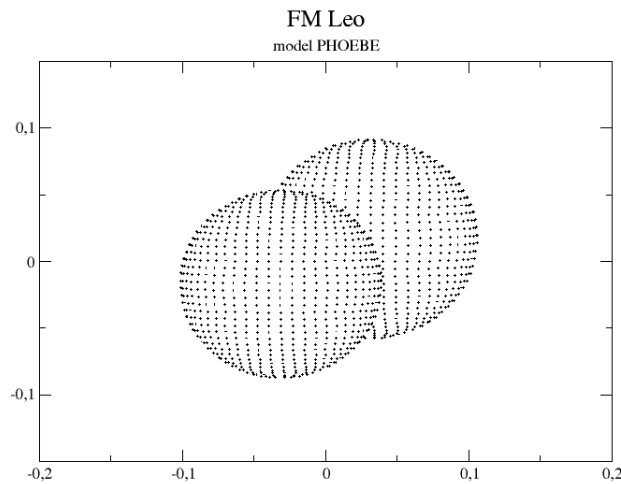
Rysunek 4.16: Góra: Krzywa zmian blasku dla FM Leo (dane: ASAS). Dół: Residua dla krzywej zmian blasku dla FM Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.017$ mag.

przeprowadzono sieć izochron (dla różnych metaliczności) sprawdzając czy przez oba składniki przebiega jedna linia łącząca punkty o tym samym wieku. Powyższą procedurę wykonano dla trzech zestawów współrzędnych: $\log g$ i $\log T$, jasność absolutna M_V i masa oraz promień R i masa M .

W przypadku zależności $\log g - \log T$ (rysunek 4.18) zauważalna jest zgodność w granicy błędów wyznaczonych wartości parametrów składników ze ścieżkami ewolucyjnymi dla oszacowanych mas gwiazd. Do obu gwiazd można dopasować

M_1	$1.293 \pm 0.022 M_\odot$
M_2	$1.286 \pm 0.022 M_\odot$
R_1	$1.47 \pm 0.05 R_\odot$
R_2	$1.54 \pm 0.05 R_\odot$
P	6.72882 ± 0.00001 d
a	$20.55 \pm 0.09 R_\odot$
q	0.994 ± 0.008
i	$88.09 \pm 0.20^\circ$
V_γ	11.88 ± 0.23 km/s
T_1	6400 ± 145 K
T_2	6326 ± 194 K
Ω_1	14.99 ± 0.51
Ω_1	14.25 ± 0.39
$\log g_1$	4.22 ± 0.04
$\log g_2$	4.17 ± 0.03

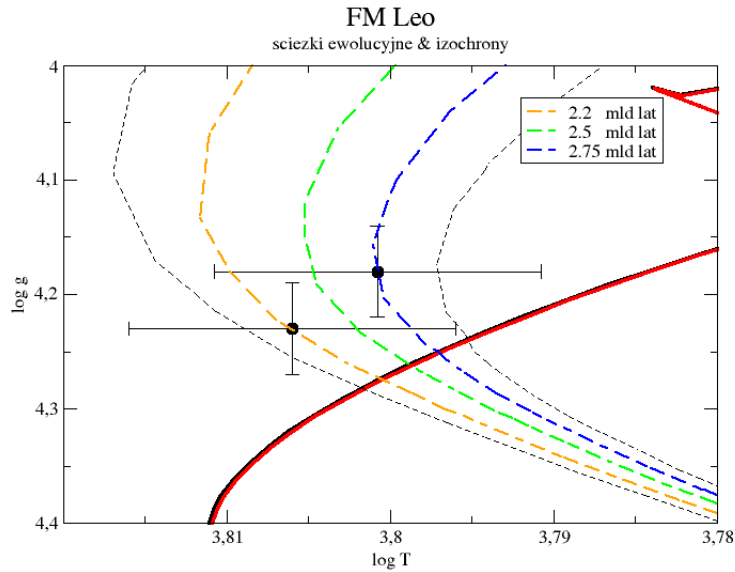
Tabela 4.2: Parametry modelu układu FM Leo wyznaczone na podstawie krzywej LC i RV uzyskanej za pomocą metody TODCOR.



Rysunek 4.17: Trójwymiarowy model układu FM Leo dla fazy 0.48.

izochrony z zakresu 2 mld - 3 mld lat dla metaliczności słonecznej ($Z = 0.018$), co świadczy o poprawności wyznaczonych parametrów.

Zależność $\log g - \log T$ korzysta ze znajomości temperatury gwiazd, która została oszacowana dla jednego składnika ze znajomości wskaźnika barwy (B-V). W celu uniknięcia błędów wynikających z tego sposobu szacowania temperatury, izochrony wykreślono dla dwóch innych zestawów współrzędnych: jasność - masa



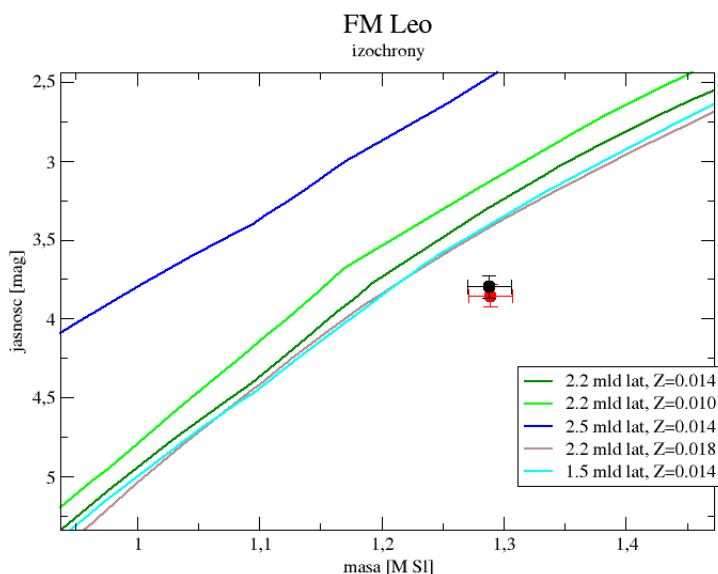
Rysunek 4.18: Ścieżki ewolucyjne (kolor czerwony i czarny) dla mas $M_1=1.293 M_\odot$ i $M_2=1.286 M_\odot$ i izochrony (2 mld lat - przerywana linia po lewej stronie wykresu, 3 mld lat - przerywana linia po prawej) dla metaliczności słonecznej ($Z=0.018$) oraz parametry odpowiadające składnikom uzyskanego modelu układu FM Leo.

oraz promień - masa.

W przypadku zależności jasność - masa (rysunek 4.19) oba składniki leżą poniżej izochron. Próby przeprowadzono dla różnych wartości metaliczności Z równej 0.01, 0.014 i 0.018 (metaliczność słoneczna). Wartość jasności absolutnej składników wyznaczona została ze znanej z Hipparcosa paralaksy i jasności widomej oraz informacji na temat stosunku jasności gwiazd, na tej samej zasadzie oszacowano błędy pomiaru. Przyczyną niezgodności może być fakt nieuwzględnienia efektu poczerwienienia, które powoduje przesunięcie położenia obiektu na wykresie wzdłuż osi jasności w górę (obiekty mają większą jasność absolutną).

Zależność promień - masa wskazuje na słuszność wieku wyznaczonego z zależności $\log g - \log T$. Wyznaczone parametry gwiazd można osadzić na wspólnej izochronie przypisanej wiekowi 2 - 2.5 mld lat.

Powyższe zależności wskazują na to, że metaliczność składników układu jest równa metaliczności Słońca ($Z = 0.018$), a wiek gwiazd wynosi około 2.5 mld lat.



Rysunek 4.19: Izochrony osadzone na wykresie zależności jasność V - masa dla różnych wieków (1.5 - 2.5 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.01, 0.014, 0.018$) gwiazd. Czarne punkty oznaczają składniki układu FM Leo. Przy wyznaczaniu jasności V gwiazd układu nie uwzględniono efektu poczerwienienia.

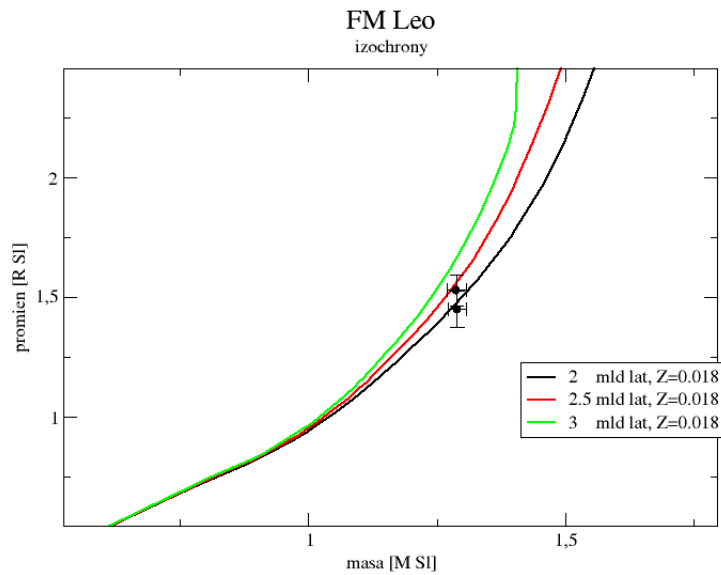
4.4.2 FK Leo

Dane o układzie

Układ FK Leo jest rozdzielonym układem podwójnym. Był obserwowany przez satelitę Hipparcos (HIC 54711), dzięki czemu wyznaczono dla niego paralakę trygonometryczną: $7.13 \pm 1.15 \text{ mas}$. Jasność układu w maksimum wynosi $V=8^m.507 \pm 0.019$ (Perryman et al., 1997), a wartość wskaźnika barwy $B-V=0.416 \pm 0.024$. Dostępna krzywa zmian blasku pochodzi z przeglądu ASAS (*All Sky Automated Survey*; Pojmański, 1997). Jej przebieg sugeruje, iż układ składa się z dwóch rozdzielonych składników o różnych wielkościach i temperaturach. Przyjęty okres zmian blasku wynosił $P=1^d.7372$ (ASAS). Typ widmowy układu sklasyfikowano jako F5III. Podobnie jak w przypadku układu FM Leo, w literaturze nie ma informacji na temat wcześniejszych obserwacji spektroskopowych tego obiektu.

Materiał obserwacyjny

W celu stworzenia modelu układu konieczne było wykonanie widm. Pochodzą z obserwatorium DDO (Kanada), z 6 nocy okresu przełomu kwietnia i maja 2006 roku (obserwator: T. Kwiatkowski). Podobnie jak widma wcześniej omawianego



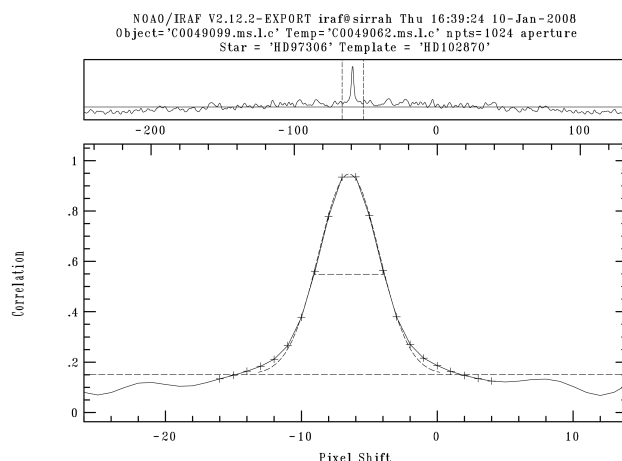
Rysunek 4.20: Izochrony osadzone na wykresie zależności promień - masa dla różnych wieków: 2, 2.5 i 3 mld lat i metaliczności Słońca ($Z = 0.018$). Czarne punkty oznaczają składniki układu FM Leo.

układu FM Leo, zostały wykonane przy pomocy 1.9 metrowego teleskopu ze spektrografem umieszczonym w ognisku Cassegraina. Czas naświetlania widm wynosił 20 minut. Obserwacje zostały wykonane w zakresie widmowym 5100 - 5275 Å.

Krzywa zmian blasku pochodzi z przeglądu nieba ASAS (*All Sky Automated Survey*; Pojmański, 1997). Dostępna fotometria została wykonana w filtrze V. Po dopasowaniu syntetycznej krzywej do danych obserwacyjnych uzyskano RMS $\sigma=0.03$ mag.

Wyniki

Wyznaczenie wartości prędkości radialnych za pomocą metody korelacji jednowymiarowej opierało się na użyciu wcześniej opisanych procedur pakietu *IRAF*. Uzyskano tylko jedno maksimum funkcji CCF (rys. 4.21), świadczące o małym wkładzie jasności drugiej gwiazdy do jasności całkowitej układu lub małej względnej prędkości obu składników (problem ten został opisany w rozdziale trzecim). Wyznaczone wartości prędkości radialnych dla składnika głównego przedstawia rysunek 4.22. Średnia kwadratowa (RMS) dopasowania wynosi $\sigma = 0.63$ km/s. Różnice między modelem dopasowanym a obserwacjami (residua) ukazano na dolnym wykresie rysunku 4.22. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\bar{\sigma}_f = 0.71$



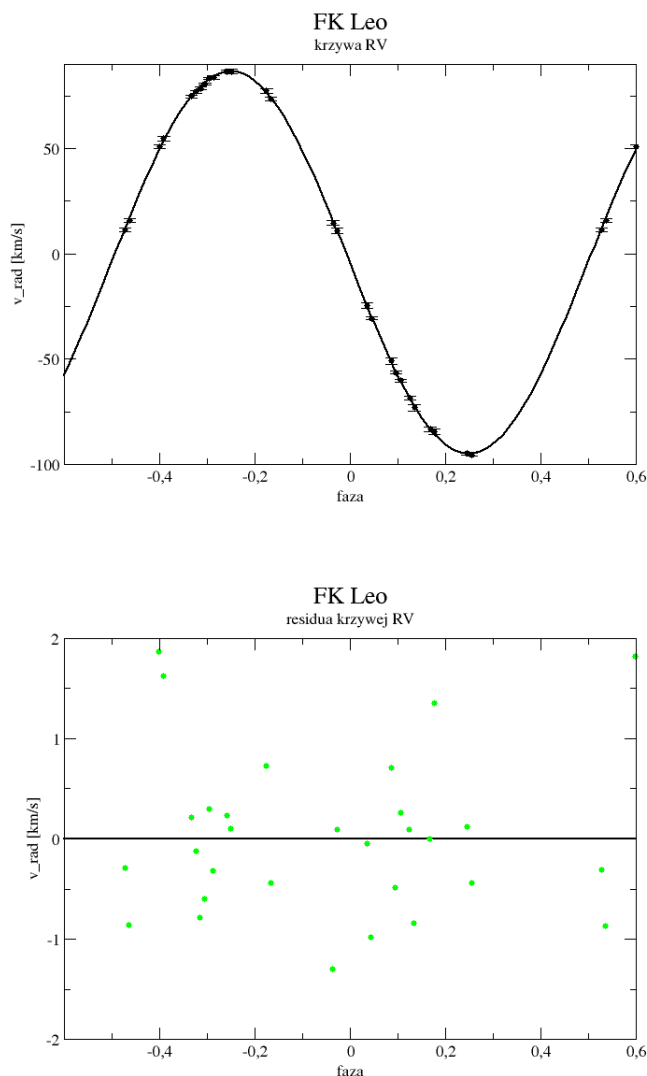
Rysunek 4.21: Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu `fxcor` dla FK Leo. Widoczny jeden pik korelacyjny (źródło: IRAF).

km/s.

Pomiar prędkości radialnych metodą korelacji dwuwymiarowej TODCOR wykazał obecność drugiego składnika układu i pozwolił na wyznaczenie jego krzywej RV. Przykładowe mapy korelacji, jakie uzyskano w trakcie wykonywania pomiaru, ukazano na rysunku 4.23. Do wyznaczenia wartości obu prędkości nie wystarczyła znajomość położenia maksimum (kolor czerwony) na wykresie, jak w przypadku układu FM Leo. Należało uwzględnić obecność słabszego maksimum, widocznego na przecięciu paska żółtego ze słabszym paskiem niebieskim. Współrzędne tego punktu odpowiadają poszukiwanym wartościom prędkości radialnych obu składników.

Uzyskane krzywe zmian prędkości radialnych dla obu składników układu FK Leo ukazano na rysunku 4.24. Średnia kwadratowa (RMS) dopasowania dla składnika głównego wynosi $\sigma_1 = 1.83$ km/s, zaś dla wtórnego $\sigma_2 = 4.67$ km/s. Różnice między modelem dopasowanym, a pomiarami (residua) przedstawiono na dolnym wykresie 4.24. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą $\sigma_{f1} = 2.63$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 7.15$ km/s. Ta istotna różnica w wartościach RMS, większy rozrzut i błędy pomiarowe dla składnika wtórnego są spowodowane jego mniejszą jasnością i większymi trudnościami w wyznaczeniu maksimum funkcji korelacji krzyżowej.

Dla składnika głównego wartość RMS jest większa niż w przypadku metody korelacji jednowymiarowej. Dodatkowo krzywa RV dla tego składnika charakteryzuje się mniejszą ilością pomiarów (kilka widm wykonanych w fazie zbliżonej do zaćmień zostało odrzuconych ze względu na zlewanie się maksimum funkcji korelacji). Z tych powodów do uzyskania ostatecznego modelu przyjęto krzywą RV dla składnika głównego uzyskaną na podstawie metody korelacji jednowymiarowej, z kolei dla składnika wtórnego - jedyną dostępną krzywą, zatem krzywą uzyska-



Rysunek 4.22: Góra: Krzywa prędkości radialnych dla składnika głównego uzyskana metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla FK Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla składnika głównego układu FK Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\bar{\sigma}_f = 0.71$ km/s.

na podstawie metody TODCOR. Przyjętą do procesu modelowania krzywą RV dla obu składników układu przedstawia wykres 4.25. Średnia kwadratowa dopasowania dla składnika głównego wynosi zatem $\sigma_1 = 0.63$ km/s, a dla składnika wtórnego $\sigma_2 = 4.67$ km/s. Residua dla ostatecznej krzywej zmian prędkości radialnych przedstawiono na dolnym wykresie 4.25. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą zatem $\bar{\sigma}_{f1} = 0.71$ km/s oraz $\bar{\sigma}_{f2} = 7.15$ km/s. Amplituda zmian

prędkości radialnych dla składnika głównego wynosi $K_1 = 94.5$ km/s, z kolei dla składnika wtórnego $K_2 = 143.6$ km/s.

Dopasowanie krzywej zmian blasku do danych obserwacyjnych przedstawia wykres na rysunku 4.26. Widoczne są spadki jasności rzędu 0.2 mag dla minimum głównego oraz 0.08 mag dla minimum wtórnego. Świadczy to o różnicy w temperaturach obu składników. Maksima krzywej są płaskie, co sugeruje symetrię sferyczną składników.

Średnia kwadratowa dopasowania krzywej LC do obserwacji wynosi $\sigma = 0.03$ mag. Residua dla krzywej zmian blasku układu FK Leo przedstawiono na dolnym wykresie 4.26. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.027$ mag.

Na podstawie krzywych prędkości radialnych uzyskanych obiema metodami (składnik główny - korelacja jednowymiarowa, składnik wtórny - TODCOR) i zmian blasku wyznaczono fizyczne parametry układu. Jego składnikami są gwiazdy o masach $M_1 = 1.425 \pm 0.013 M_\odot$ i $M_2 = 0.925 \pm 0.009 M_\odot$ oraz promieniach $R_1 = 1.98 \pm 0.86 R_\odot$ i $R_2 = 1.17 \pm 0.47 R_\odot$. Półoś wielka układu została oszacowana na wartość $a = 8.08 \pm 0.02 R_\odot$, a nachylenie na $i = 77.44 \pm 0.52^\circ$. Prędkość radialna układu wynosi $V_\gamma = -2.87 \pm 0.20$ km/s, temperatury zaś $T_1 = 6700 \pm 145$ K i $T_2 = 5018 \pm 309$ K. Podobnie jak w przypadku FM Leo, temperatura pierwszego składnika została oszacowana z wartości wskaźnika barwy (B-V), a druga dopasowana przez program *PHOEBE*.

Założony jako parametr wstępny okres $P = 1^d.7372$ (ASAS) został poprawiony na wartość $P = 1^d.73710 \pm 0.00006$, by krzywe syntetyczne lepiej dopasować do obserwacji.

Uzyskane wartości parametrów przedstawia tabela 4.3.

Trójwymiarowy model układu przedstawiono na rysunku 4.27.

Wyznaczenie wieku układu

W celu weryfikacji poprawności wyznaczonych parametrów przeprowadzono test polegający na sprawdzeniu czy oba składniki układu są tego samego wieku. Podobnie jak w przypadku wcześniej omówionego układu FM Leo, gwiazdy osadzono na ścieżkach ewolucyjnych odpowiadających ich masom oraz przeprowadzono sieć izochron (dla różnych metaliczności) sprawdzając czy przez oba składniki przebiega jedna linia łącząca punkty o tym samym wieku. Powyższą procedurę wykonano dla trzech zestawów współrzędnych: $\log g$ i $\log T$, jasność absolutna M_V i masa oraz promień R i masa M .

Zależność $\log g - \log T$ (rysunek 4.28) ukazuje, że oba składniki leżą blisko swych ścieżek ewolucyjnych, występuje jednak niezgodność w odniesieniu do wieku układu. Dodatkowo, położenie składnika mniej masywnego wskazuje, że nie można przez niego przeprowadzić żadnej izochrony (testy przeprowadzono dla izochron z zakresu wieku 1 - 10 mln lat i różnych metaliczności). Jednak próba znalezienia alternatywnego rozwiązania dla zadanych parametrów wejściowych

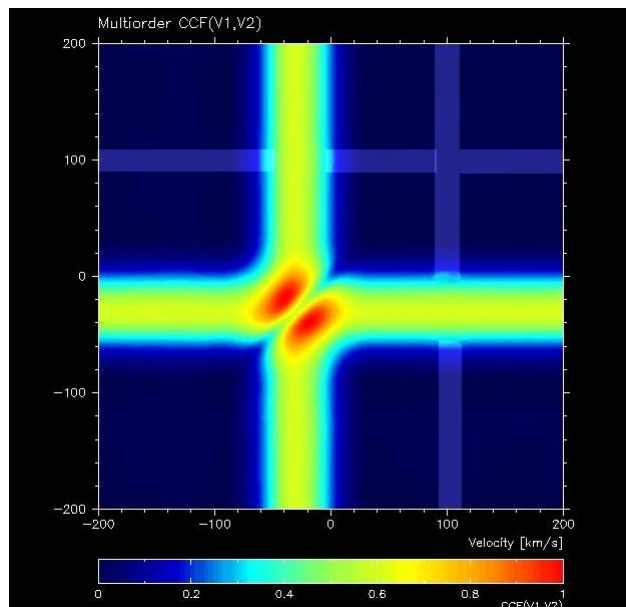
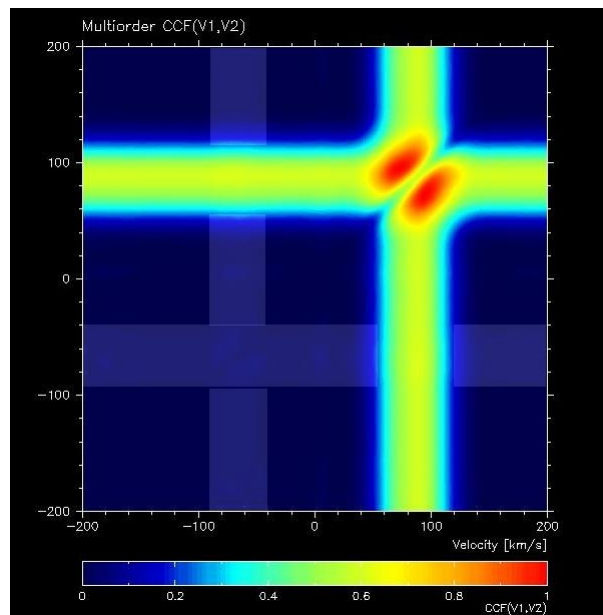
odrzuca taką możliwość.

Zależność jasność - masa (rysunek 4.29) potwierdza słuszność wyznaczonych parametrów. Przez obie gwiazdy przeprowadzić można wspólne izochrony, wyznaczając wiek i metaliczność składników. Testy przeprowadzono dla izochron z zakresu 1.5 - 2.74 mld lat oraz zawartości Z równej 0.014 i 0.018. Przez oba składniki można przeprowadzić izochrony dla 2.2 mld lat i metaliczności słonecznej ($Z = 0.018$) oraz dla wieku 1.5 mld lat i zawartości $Z = 0.014$. Oznacza to, że możemy szacować wiek oraz metaliczność gwiazd układu w podanych zakresach wartości.

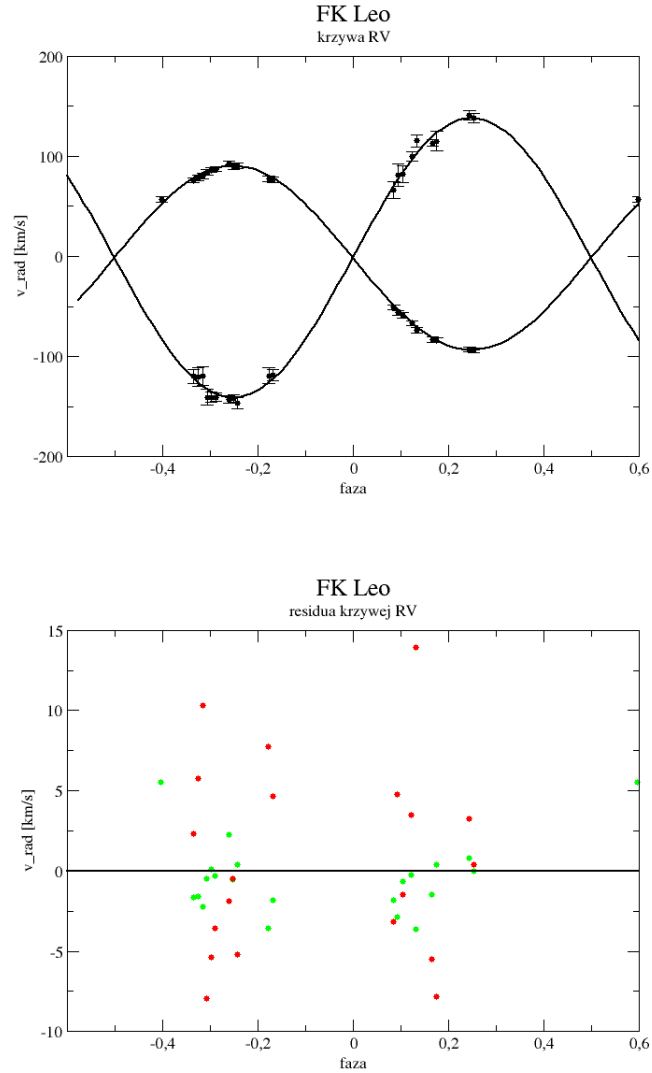
Wartość jasności absolutnej składników wyznaczona została ze znanej z Hipparcosa paralaksy i jasności widomej oraz informacji na temat stosunku jasności gwiazd. Należy zaznaczyć, że w powyższych rozważaniach nie uwzględniono efektu poczerwienienia, które powoduje przesunięcie położenia obiektu na wykresie wzdłuż osi jasności w górę.

Zależność promień - masa (rysunek 4.30) charakteryzuje się dużymi błędami promieni składników, które uniemożliwiają wyznaczenie wieku układu. Składnik mniejszy znajduje się ewidentnie powyżej przeprowadzonych izochron.

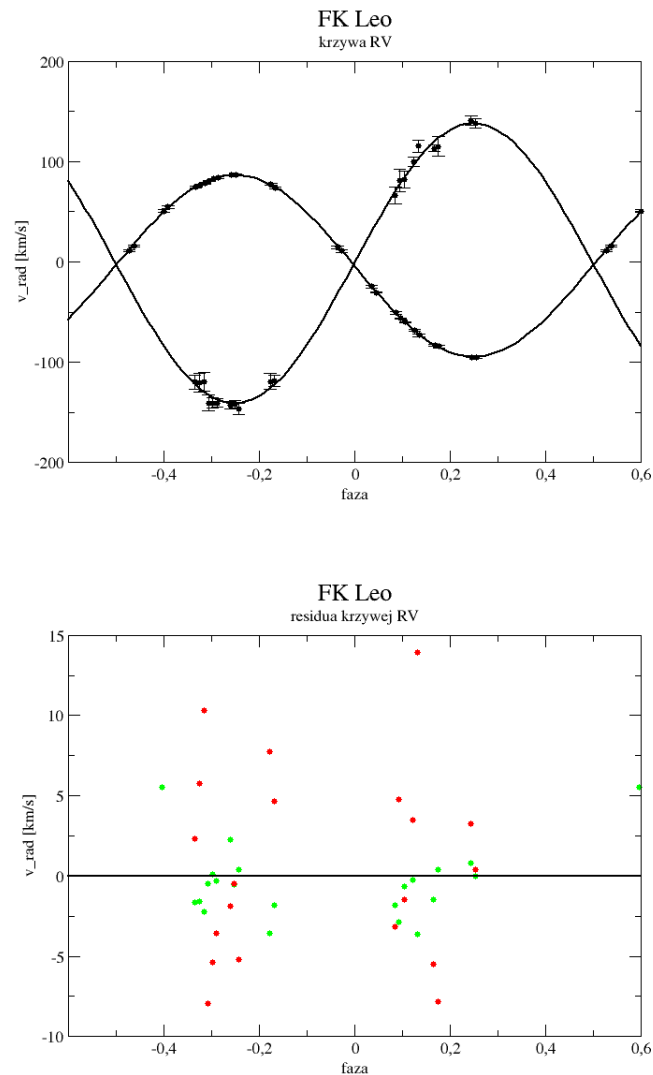
Powyższe zależności wskazują na to, że położenie punktów na wykresach (szczególnie w przypadku składnika wtórnego obciążonego większymi błędami pomiarowymi i gorszym dopasowaniem) pozwala na wyznaczenie wieku układów w mniejszym stopniu niż w przypadku FM Leo. Prawdopodobny wiek składników szacuje się na 2.2 mld lat.



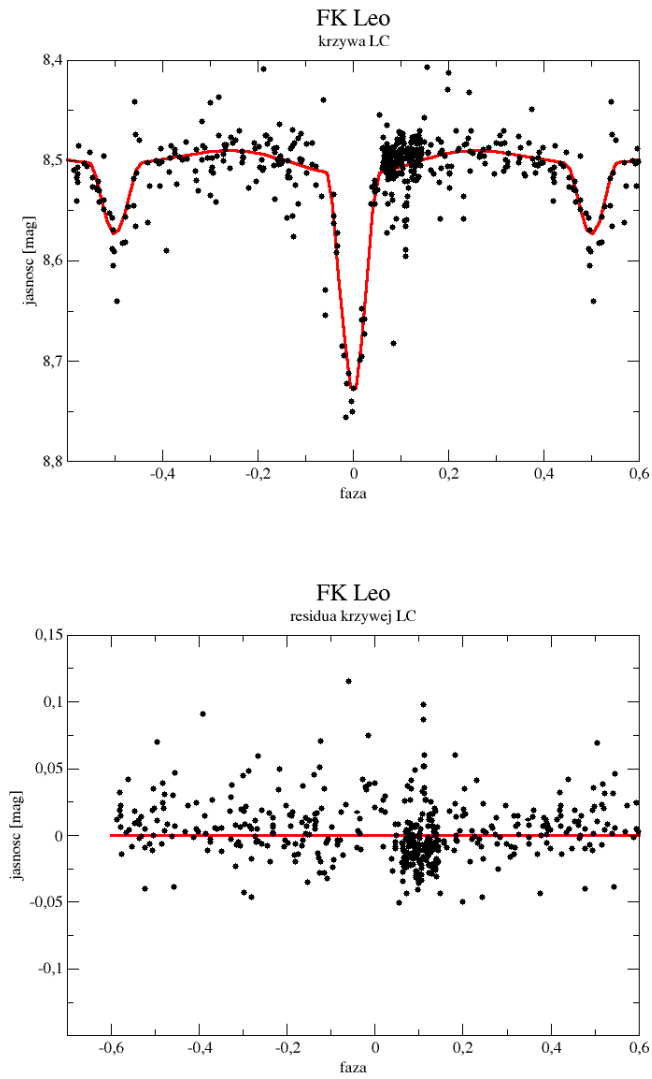
Rysunek 4.23: Mapy funkcji korelacji dla FK Leo uzyskane na podstawie użycia metody TODCOR. Wartości na osiach odpowiadają prędkościom gwiazd układu. Widoczne maksimum (kolor czerwony) nie odpowiada rzeczywistym wartościom obu prędkości. Poprawny wynik ukryty jest w obecności słabszego maksimum (przecięcie żółtego paska ze słabym paskiem niebieskim znajdującym się w okolicy wartości prędkości $v = -70$ [km/s] (góra) i $v = +100$ [km/s] (dół)). Współrzędne tego piksu odpowiadają wartościom prędkości radialnych obu składników. Na rysunkach zwiększono kontrast w celu uwidocznienia wyników.



Rysunek 4.24: Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskana metodą TODCOR dla układu FK Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą TODCOR dla obu składników układu FK Leo. Kolorem zielonym zaznaczono residua dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą $\sigma_{f1} = 2.63$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 7.15$ km/s.



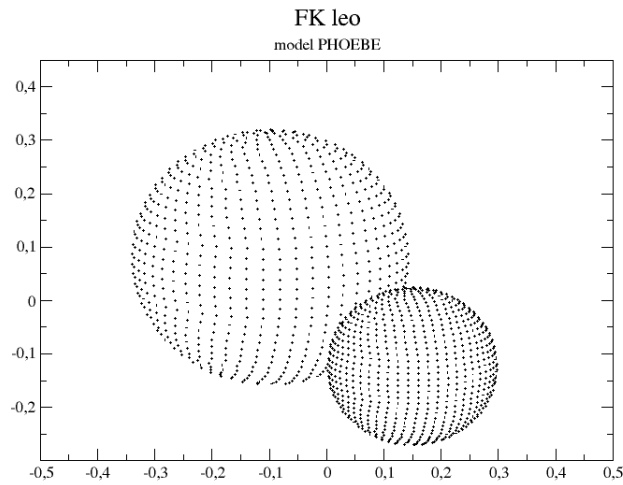
Rysunek 4.25: Góra: Krzywa prędkości radialnych dla układu FK Leo. Dla składnika głównego (mniejsza amplituda) krzywą RV uzyskano na podstawie metody korelacji jednowymiarowej, z kolei dla składnika wtórnego (większa amplituda) - metodą TODCOR. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych przedstawionej na rysunku 4.25 dla obu składników układu FK Leo. Kolorem zielonym zaznaczono rozrzut dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 0.71$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 7.15$ km/s.



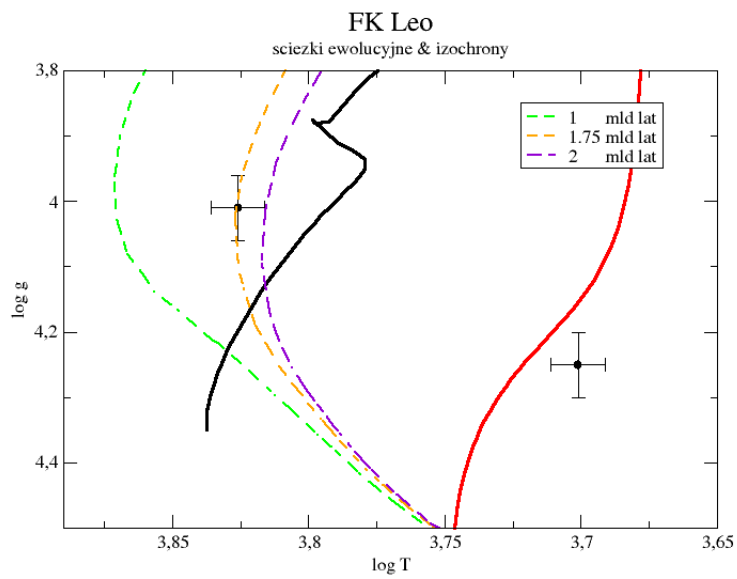
Rysunek 4.26: Góra: Krzywa zmian blasku dla FK Leo (dane: ASAS). Dół: Residua dla krzywej zmian blasku dla FK Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.027$ mag.

M_1	$1.425 \pm 0.013 M_\odot$
M_2	$0.925 \pm 0.009 M_\odot$
R_1	$1.98 \pm 0.86 R_\odot$
R_2	$1.17 \pm 0.47 R_\odot$
P	1.73710 ± 0.00006 d
a	$8.08 \pm 0.02 R_\odot$
q	0.649 ± 0.003
i	$77.44 \pm 0.52^\circ$
V_γ	-2.87 ± 0.20 km/s
T_1	6700 ± 145 K
T_2	5018 ± 309 K
Ω_1	4.76 ± 1.47
Ω_2	5.65 ± 1.56
$\log g_1$	4.00 ± 0.44
$\log g_2$	4.26 ± 0.32

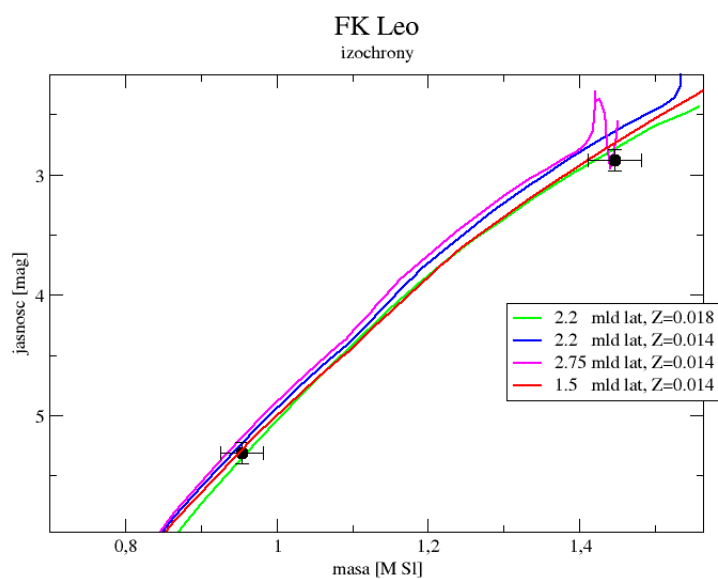
Tabela 4.3: Parametry modelu układu FK Leo wyznaczone na podstawie krzywej LC i RV uzyskanej za pomocą metody TODCOR oraz korelacji jednowymiarowej.



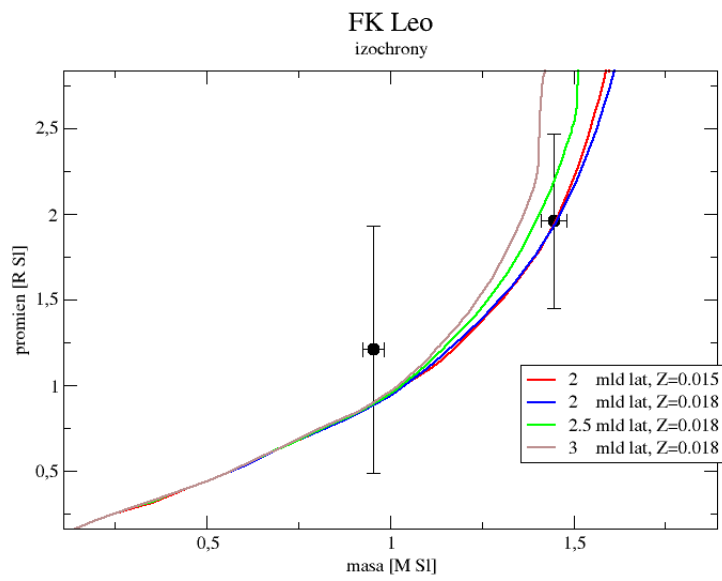
Rysunek 4.27: Trójwymiarowy model układu FK Leo dla fazy 0.03.



Rysunek 4.28: Ścieżki ewolucyjne (kolor czarny i czerwony) dla mas $M_1 = 1.425 M_\odot$ i $M_2 = 0.925 M_\odot$ i izochrony dla wieku 1, 1.75, 2 mld lat i metaliczności słonecznej ($Z=0.018$) oraz parametry odpowiadające uzyskanym składnikom modelu układu FK Leo.



Rysunek 4.29: Izochrony osadzone na wykresie zależności jasność V - masa dla różnych wieków (1.5, 2.2, 2.75 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.014, 0.018$) gwiazd (patrz: legenda). Czarne punkty oznaczają składniki układu FK Leo. Przy wyznaczaniu jasności V gwiazd układu nie uwzględniono efektu poczerwienienia.



Rysunek 4.30: Izochrony osadzone na wykresie zależności promień - masa dla różnych wieków (2, 2.5, 3 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.015, 0.018$) gwiazd (patrz: legenda). Czarne punkty oznaczają składniki układu FK Leo.

Rozdział 5

Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było wyznaczenie parametrów opisujących dwa układy gwiazd podwójnych zaćmieniowych FM Leo ($P=6^d.72856$, $V=8^m.464$) i FK Leo ($P=1^d.7372$, $V=8^m.507$) oraz sprawdzenie ich poprawności poprzez osadzenie gwiazd na ścieżkach ewolucyjnych odpowiadających ich masom oraz przeprowadzenie sieci izochron (dla różnych metaliczności) sprawdzając czy oba składniki są tego samego wieku.

Opis części praktycznej realizowanej w ramach pracy magisterskiej został poprzedzony szerokim wstępem teoretycznym na temat wykorzystania układów podwójnych zaćmieniowych do wyznaczania parametrów gwiazd. W pracy został również zawarty przegląd dostępnych informacji na temat metod tworzenia ścieżek ewolucyjnych i izochron oraz parametrów wpływających na ich poprawność. Kolejną część pracy poświęcono rozległemu opisowi metod wyznaczania prędkości radialnych: korelacji krzyżowej jednowymiarowej i dwuwymiarowej, zwanej TODCOR.

Część praktyczna realizowana w ramach pracy magisterskiej polegała na redukcji widm, wyznaczeniu prędkości radialnych składników układów podwójnych przy użyciu dwóch metod korelacji, wyznaczeniu krzywej zmian blasku z danych fotometrycznych dostępnych z ASASa, oszacowaniu parametrów gwiazd oraz sprawdzeniu ich poprawności. Dodatkowym elementem uczyniono wyznaczenie wieku układów.

Analizowane układy nie były wcześniej obserwowane spektroskopowo, zatem do wyznaczenia modelu konieczne było wykonanie widm. Użyty materiał obserwacyjny pochodzi z obserwatorium DDO (Kanada), z 7 nocy przełomu kwietnia i maja 2006 roku. Widma zostały wykonane przy pomocy 1.9 metrowego teleskopu ze spektrografem umieszczonym w ognisku Cassegraina. Czas naświetlania w przypadku każdego z widm wynosił 20 minut. Obserwacje zostały wykonane w zakresie widmowym 5100 - 5275 Å. Dostępna fotometria to krzywe zmian blasku

pochodzące z przeglądu ASAS.

Redukcję widm przeprowadzono w oparciu o pakiet *IRAF*, służący do obróbki danych CCD. Po wykonaniu wstępnej obróbki widm przeprowadzono procedurę redukcyjną, którą można podzielić na kroki: tracing, ekstrakcja, identyfikacja linii w widmie lampy kalibracyjnej, wyznaczenie transformacji $x \rightarrow \lambda$ (numer piksela \rightarrow długość fali) i kalibracja widm obiektu w długości fali. Wykorzystane zostały następujące zadania (taski) *IRAF*a: `apall`, `identify`, `dispcor`. Do kalibracji w długości fali użyto lampy FeAr.

Prędkości radialne składników układu zostały wyznaczone przy użyciu dwóch metod korelacji krzyżowej opisanych w rozdziale trzecim. Są to: metoda korelacji jednowymiarowej i dwuwymiarowej - TODCOR.

W przypadku pierwszej zastosowanej metody jako widmo odniesienia dla obu badanych układów posłużyło widmo gwiazdy o typie widmowym podobnym do analizowanych składników wykonane tej samej nocy obserwacyjnej co widmo obiektu. Do wyznaczenia wartości funkcji korelacji (CCF) oraz obliczenia prędkości wykorzystany został task *IRAF*a `fxcor`. Dla układu FM Leo uzyskano dwa piki korelacyjne i wyznaczono dwie krzywe prędkości radialnych. Analiza obiektu drugiego - FK Leo dała w efekcie tylko jeden pik korelacyjny, co świadczy o niewielkim wkładzie drugiego składnika do jasności całkowitej układu.

Drugą metodą wyznaczania prędkości radialnych składników układu była korelacja dwuwymiarowa TODCOR. Widmem odniesienia uczyniono pojedyncze widmo syntetyczne wygenerowane na podstawie modeli Kurucza (1979) dla metaliczności słonecznej i temperatury 6400 K. Dla obu przypadków obrano inną wartość prędkości rotacji dla widma syntetycznego świadczącą o stopniu poszerzenia linii (FM Leo: $v_{rot} = 30$ km/s, FK Leo: $v_{rot} = 2$ km/s). Analiza układu tą metodą pozwoliła na zaobserwowanie obu składników zarówno układu FM Leo, jak i FK Leo i pozwoliła na wyznaczenie ich krzywych RV.

W przypadku układu FM Leo w wyniku metody korelacji jednowymiarowej uzyskano średnią kwadratową (RMS) dopasowania krzywych RV równą $\sigma_1=0.94$ km/s oraz $\sigma_2=0.51$ km/s dla gwiazd układu, z kolei dla metody TODCOR RMS wynosił odpowiednio $\sigma_1=0.93$ km/s dla składnika głównego oraz $\sigma=0.62$ km/s dla drugiego składnika. Dla układu FK Leo metoda korelacji jednowymiarowej dała w wyniku dopasowania krzywej RV RMS $\sigma=0.63$ km/s dla jednego zaobserwowanego składnika. W wyniku pomiaru prędkości radialnych za pomocą metody TODCOR uzyskano $\sigma_1=1.83$ km/s dla składnika głównego oraz $\sigma_2=4.67$ km/s dla drugiego. W efekcie do modelowania przyjęto dla układu FM Leo krzywe RV uzyskane metodą TODCOR, a w przypadku FK Leo dla składnika głównego krzywą uzyskaną metodą korelacji jednowymiarowej (mniejsza wartość σ), a dla gwiazdy drugiej - jedyną dostępną krzywą, zatem uzyskaną na podstawie metody TODCOR.

Na podstawie dostępnych krzywych zmian blasku i prędkości radialnych wy-

znaczono parametry analizowanych układów. Do tego celu wykorzystano program *PHOEBE* bazujący na metodzie Wilsona - Devinney'a. Uzyskane wartości parametrów obu układów przedstawiają tabele 4.2 i 4.3.

W przypadku układu FM Leo wyznaczone parametry wskazują na to, że składnikami układu są dwie podobne gwiazdy o masach $M_1=1.293 \pm 0.022 M_\odot$ oraz $M_2=1.286 \pm 0.022 M_\odot$ oraz promieniach równych odpowiednio $R_1=1.47 \pm 0.05 R_\odot$ i $R_2=1.54 \pm 0.05 R_\odot$. Półoś wielka układu została oszacowana na wartość $a=20.55 \pm 0.09 R_\odot$, a nachylenie na $i=88.09 \pm 0.20^\circ$. Prędkość radialna układu wynosi $V_\gamma=11.88 \pm 0.23$ km/s.

Dla układu FK Leo w wyniku modelowania uzyskano wyniki wskazujące na to, że składnikami są gwiazdy o masach $M_1=1.425 \pm 0.013 M_\odot$ i $M_2=0.925 \pm 0.009 M_\odot$ oraz promieniach $R_1=1.98 R_\odot \pm 0.86$ i $R_2 = 1.17 \pm 0.47 R_\odot$. Półoś wielka układu została oszacowana na wartość $a=8.08 \pm 0.02 R_\odot$, a nachylenie na $i=77.44 \pm 0.52^\circ$. Prędkość radialna układu wynosi $V_\gamma=-2.87 \pm 0.20$ km/s.

Poprawność wyznaczonych parametrów analizowanych gwiazd oszacowano poprzez osadzenie na ścieżkach ewolucyjnych odpowiadających ich masom oraz przeprowadzenie sieci izochron (dla różnych metaliczności) sprawdzając czy przez oba składniki przebiega jedna linia łącząca punkty o tym samym wieku. Procedurę powyższą zastosowano dla trzech zestawów parametrów: $\log g$ i $\log T$, jasność absolutna M_V i masa oraz promień R i masa M . Dla układu FM Leo potwierdzono słuszność wyznaczonych parametrów, na co wskazuje ich zgodność w granicy błędów z przebiegiem ścieżek ewolucyjnych oraz przeprowadzenie wspólnej izochrony dla wieku na ok. 2 - 2.5 mld lat. W przypadku FK Leo rozbieżność położenia punktów na wykresach względem izochron oraz ścieżek ewolucyjnych jest znacznie większa, zwłaszcza dla składnika wtórnego. Niezgodności wynikające z analizy trzech omawianych zależności dla tego układu są prawdopodobnie spowodowane trudnościami w detekcji drugiego składnika, co ma znaczny wpływ na stosunkowo duże błędy wyznaczonych parametrów. Szacowany wiek układu wynosi ok. 2.2 mld lat.

Kolejną metodą sprawdzającą poprawność uzyskanych wyników było wyznaczenie odległości do obiektów ze znajomości promienia gwiazd, ich temperatury oraz jasności absolutnej układów i porównanie jej ze znaną odległością z Hipparcosa ($\pi = 8.35 \pm 1.17$ mas, $d = 119.8 \pm 19.5$ pc). W przypadku FM Leo uzyskano wartość paralaksy $\pi = 7.57 \pm 0.71$ mas oraz odległość $d = 132 \pm 12$ pc, co daje wartość zgodną z oczekiwaną. Dla FK Leo (wyniki z Hipparcosa: $\pi = 7.13 \pm 1.15$ mas, $d = 140 \pm 27$ pc) uzyskane wyniki to $\pi = 6.84 \pm 3.35$ mas oraz $d = 146 \pm 60$ pc, co również jest wartością zgodną.

Podsumowując, warto zwrócić uwagę na fakt, że pomiary prędkości radialnej w wyniku zastosowania metody korelacji TODCOR dają w efekcie porównywalne dopasowanie (zbliżona wartość σ). Istotnym atutem metody korelacji dwuwymiarowej jest potwierdzony doświadczalnie fakt możliwości zaobserwowa-

nia składnika słabszego, którego detekcja w metodzie korelacji jednowymiarowej była niemożliwa.

W celu potwierdzenia i zwiększenia dokładności uzyskanych parametrów analizowanych gwiazd aktualnie prowadzone są obserwacje spektroskopowe w Borowcu. Zwiększenie ilości danych obserwacyjnych pozwoli na sprecyzowanie uzyskanych parametrów układów FM Leo i FK Leo i przygotowanie publikacji do periodyka recenzowanego.

Spis symboli i skrótów

Skrót	Opis	Strona
LC	<i>Light Curve</i> , krzywa zmian blasku	page 5
RV	<i>Radial Velocity Curve</i> , krzywa zmian prędkości radialnych	page 7
SB1	<i>single-lined spectroscopic binary</i> , układy podwójne zaćmieniowe z pojedynczymi liniami	page 5
SB2	<i>single-lined spectroscopic binary</i> , układy podwójne zaćmieniowe z podwojonymi liniami	page 10
TAMS	<i>Terminal Age Main Sequence</i> , czas zejścia z ciągu głównego	page 18
ZAMS	<i>Zero Age Main Sequence</i> , czas wejścia na ciąg główny	page 18
WD	metoda Wilsona - Devinneya	page 2
CCF	<i>Cross Correlation Function</i> , funkcja korelacji krzyżowej	page 37
RMS	<i>Root Mean Square</i> , średnia kwadratowa	page 38
TODCOR	metoda korelacji krzyżowej dwuwymiarowej	page 45
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> , szybka transformata Fouriera	page 47
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> , dyskretna transformata Fouriera	page 47
SA	prosta średnia	page 54
DC	współczynnik determinacji	page 55
ML	maksymalna wiarygodność	page 55
VA	średnia ważona	page 58
COM	<i>Centre Of Mass</i> , środek masy	page 69

Spis rysunków

1.1	Klasyfikacja fenomenologiczna (EA - typ Algola, EB - typ β Lyr, EW - typ W UMa) (Dimitrov, 2007).	6
1.2	Klasyfikacja morfologiczna: układ rozdzielony, półrozdzielony, kontaktowy i ponadkontaktowy o maksymalnych możliwych rozmiarach (źródło: katalog gwiazd podwójnych CALEB).	7
1.3	Wpływ nachylenia orbity na kształt krzywej blasku (Dimitrov, 2007).	8
1.4	Wpływ nachylenia orbity na kształt krzywej blasku ($i < 90^\circ$) (Dimitrov, 2007).	9
1.5	Porównanie krzywych blasku i prędkości radialnych dla tej samej pary gwiazd dla orbity kołowej i eliptycznej $e = 0.4$	10
1.6	Krzywe zmian prędkości radialnych i blasku dla czterech wartości $\omega = 0, 1.57, 3.14, 4.71$ rad dla mimośrodu $e = 0.3$ (Dimitrov, 2007).	11
1.7	Orbita układu podwójnego w przestrzeni trójwymiarowej. Masa M_1 znajduje się w początku układu współrzędnych, masa M_2 zajmuje położenie w punkcie P_2 . Objaśnienie symboli w tekście (Hilditch, 2001).	12
1.8	Wykres zależności masy od jasności dla 192 gwiazd układów podwójnych typu SB2 (Svechnikov, 1984).	14
1.9	Układ podwójny zaćmieniowy dla nachylenia orbity $i \approx 90^\circ$. Mniejszy składnik jest gwiazdą cieplejszą. Litery a, b, c, d, e, f oznaczają różne fazy zaćmień.	15
1.10	Krzywa zmian blasku dla układu przedstawionego na rysunku 1.9. Czasy $t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, t_f$ odpowiadają różnym fazom zaćmień.	16
1.11	Wykres $\log M/M_\odot - \log g$ dla składników 45 układów podwójnych (Andersen, 1991). Linie ciągłe łączą składniki układu. Przerywane linie wskazują zależność $\log M/M_\odot - \log g$ dla modeli ZAMS i TAMS. Średnia niepewność wyznaczenia położenia punktów znajduje się w prawym górnym rogu wykresu (Andersen, 1993).	19

1.12	Wykres zależności $\log L$ od $\log T_e$ dla wybranych składników układów podwójnych Andersena (1991) o masach $1.5-2.5 M_\odot$; $\log g < 3.9$. Ścieżki ewolucyjne standardów dla obserwowanych mas (model VandenBerga), którym odpowiadają odpowiednie symbole zostały zaznaczone liniami przerywanymi. Strzałka wskazuje kierunek, w którym przesuują się modele przy zmianie Z (Andersen, 1993).	20
1.13	To co na rys. 1.12 dla modeli Maedera i Meyneta (1988) uwzględniających przestrzeliwanie konwektywne (<i>overshooting</i>) dla gwiazd o metaliczności słonecznej (Andersen, 1993).	21
1.14	Diagram HR dla 58 układów podwójnych ze składnikami większymi niż $0.6 M_\odot$. Linie ciągłe i przerywane oznaczają różne wartości ZAMS dla $Z=0.02$ (Lastennet, 2002).	22
2.1	Obszary koncentracji gwiazd na diagramie HR (na podstawie Binney & Merrifield, 1998). Symbolika wyjaśniona w tekście.	24
2.2	Diagram HR dla gwiazd o masach $0.5 - 15 M_\odot$ (Kubiak, 1994). Masy gwiazd podane w nawiasach.	26
2.3	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ dla mas $0.6 - 2.5 M_\odot$ obejmujące fazy ewolucji od ZAMS do RGB (małe masy) lub AGB ($M < 2.5 M_\odot$) (Bertelli, 2008).	27
2.4	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ dla mas $0.55 - 1.6 M_\odot$ obejmujące fazy ewolucji od ZAHB (pas niestabilności) do AGB (Bertelli, 2008).	28
2.5	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.40$ dla mas $0.6 - 2.5 M_\odot$ obejmujące fazy ewolucji od ZAMS do RGB (małe masy) lub AGB ($M < 2.5 M_\odot$) (Bertelli, 2008).	29
2.6	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.40$ dla mas $0.55 - 1.6 M_\odot$ obejmujące fazy ewolucji od ZAHB (pas niestabilności) do AGB (Bertelli, 2008).	29
2.7	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.001$ i helu $Y=0.23$ (linia przerywana) oraz $Y=0.40$ (linia ciągła) dla mas $0.6, 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5 M_\odot$ (Bertelli, 2008).	30
2.8	Ścieżki ewolucyjne dla zawartości metali $Z=0.040$ i helu $Y=0.26$ (linia przerywana) oraz $Y=0.40$ (linia ciągła) dla mas $0.6, 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5 M_\odot$ (Bertelli, 2008).	30
2.9	Ścieżki ewolucyjne dla mas $0.4-5.0 M_\odot$ obejmujące fazy ewolucji przed wejściem na ciąg główny (linia przerywana) po gałąź czerwonych olbrzymów (RGB); wygenerowane na podstawie kodu YSEC (Yi et al., 2001).	33
2.10	Izochrony Y^2 dla wieku $1 \text{ mln} - 20 \text{ mld lat}$ i metaliczności $Z=0.02$ (Yi et al., 2001).	34

2.11	Porównanie przebiegu izochron Y^2 (linia ciągła) i RYI (linia przerywana) dla wieku = 1, 5, 10, 20 mld lat i metaliczności $Z=0.02$ (Yi et al., 2001).	35
3.1	Przebieg funkcji korelacji krzyżowej (CCF). Maksimum funkcji występuje w punkcie odpowiadającym wartości przesunięcia obu widm w skali prędkości radialnych (górną oś) i numeru piksela (dolną oś). Wykres powstał w wyniku wykorzystania funkcji <code>fxcor</code> wyznaczającej jednowymiarową CCF w IRAFie.	38
3.2	Jednowymiarowa korelacja krzyżowa układu typu SB2 dla widma odniesienia typu widmowego A. Strzałki wskazują prędkości składników układu użyte w symulacjach odpowiadające różnicy: 80 km/s, 50 km/s, 20 km/s (Zucker & Mazeh, 1994).	44
3.3	Jednowymiarowa korelacja krzyżowa układu typu SB2 dla widma odniesienia typu widmowego G. Strzałki wskazują prędkości składników układu użyte w symulacjach odpowiadające różnicy: 80 km/s, 50 km/s, 20 km/s (Zucker & Mazeh, 1994).	45
3.4	Wykres funkcji dwuwymiarowej korelacji krzyżowej wokół swego maksimum. Linie przerywane są równoległe do osi prędkości s_1 i s_2 i przechodzą przez maksimum (Zucker & Mazeh, 1994).	49
3.5	Przekroje poprzeczne funkcji dwuwymiarowej korelacji krzyżowej wzdłuż przerywanych linii na rys. 3.4. Strzałki wskazują na prędkości użyte w symulacjach (Zucker & Mazeh, 1994).	50
3.6	Przebieg funkcji korelacji krzyżowej dla widma wzorcowego i widm z zaszumieniem o odchyleniu standardowym równym odpowiednio 0.05 (górną), 0.1 (środek), 0.2 (dół) (Zucker, 2003).	55
3.7	Histogram stosunku przesunięcia funkcji korelacji (Δv) do wyznaczonego błędnie σ_v . Trzy wykresy odpowiadają poziomom szumu o odchyleniu równym 0.05, 0.1 i 0.2 odpowiednio. Linia przerywaną oznaczono przebieg standardowego rozkładu Gaussa (Zucker, 2003).	56
3.8	Na górze: funkcja korelacji krzyżowej dla pojedynczego rzędu widma. Na środku: prosta średnia (SA) funkcji korelacji krzyżowych dla 10 rzędów widma. Na dole: połączenie funkcji CCF metodą największej wiarygodności (ML) dla tych samych 10 rzędów widma (Zucker, 2003).	57
3.9	Rozkład położenia pików dla każdej z czterech metod łączenia funkcji CCF: prostej średniej (SA), połączenia współczynników determinacji (DC), średniej ważonej dla każdego z rzędów (VA) oraz metody największej wiarygodności (VA) (Zucker, 2003).	58
3.10	Histogram stosunku przesunięcia wyznaczonych korelacji na podstawie metody największej wiarygodności (Δv) do wyznaczonego błędnie σ_v . Linia przerywaną oznaczono przebieg standardowego rozkładu Gaussa (Zucker, 2003).	59

4.1	Widmo lampy kalibracyjnej żelazowo - argonowej jako zależność natężenia od numeru piksela (źródło: IRAF).	63
4.2	Widmo FM Leo. Widoczne podwojenie linii (źródło: IRAF).	64
4.3	Widmo FK Leo (źródło: IRAF).	64
4.4	Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu <code>fxcor</code> dla FM Leo. Widoczne dwa piki korelacyjne świadczące o podwójności układu (źródło: IRAF).	65
4.5	Metoda korelacji krzyżowej dwuwymiarowej TODCOR w praktyce. Opis znajduje się w tekście.	66
4.6	Geometria układu podwójnego. Początek układu współrzędnych znajduje się w środku gwiazdy o masie M_1 . COM oznacza środek masy, a - odległość między składnikami, s_1 i s_2 odległości pomiędzy środkami gwiazd a cząstką próbną o masie m . Wektor \tilde{r} łączy środek masy z cząstką m (Prsa, 2006).	68
4.7	Układ odniesienia w rozpatrywanym zagadnieniu układu podwójnego. Środek układu znajduje się w środku gwiazdy o większej masie, L_1 oznacza punkt Lagrange'a. Siły F_1 i F_2 to siły grawitacyjne pochodzące od obu składników, F_{ods} - siła odśrodkowa skierowana wzdłuż linii łączącej środek masy układu z cząstką próbną (Dimitrov, 2007).	68
4.8	Prawoskrętny układ współrzędnych sferycznych dla rozważanego zagadnienia. Kąt biegunowy θ może przyjmować wartości od 0° na biegunie $+z$ do 180° na biegunie $-z$, kąt azymutalny ϕ przyjmuje wartości od 0° na osi x do 360° (Prsa, 2006).	69
4.9	Strefy Roche'a dla dwóch gwiazd niebędących w ruchu (kolor odpowiada strefie o określonym zakresie potencjału) (Bruton, 2004).	70
4.10	Strefy Roche'a dla dwóch gwiazd o różnych masach obiegających środek masy układu (kolor odpowiada strefie o określonym zakresie potencjału) (Bruton, 2004).	70
4.11	Wygląd interfejsu graficznego programu <i>PHOEBE</i> . Widoczne okno dopasowania krzywej zmian blasku dla FM Leo.	76
4.12	Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu <code>fxcor</code> dla FM Leo. Widoczne dwa piki korelacyjne świadczące o podwójności układu. Dolny wykres przedstawia piki o zbliżonej wartości prędkości (zbliżające się do fazy zaćmienia) (źródło: IRAF).	77
4.13	Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej <code>fxcor</code> dla FM Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej <code>fxcor</code> dla FM Leo. Średni błąd formalny pomiaru wynosi $\bar{\sigma}_f = 0.017$ mag.	78
4.14	Zastosowanie metody korelacji krzyżowej dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo.	79

- 4.15 Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji dwuwymiarowej TODCOR dla FM Leo. Kolorem zielonym zaznaczono residua dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 1.12$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 1.04$ km/s. 81
- 4.16 Góra: Krzywa zmian blasku dla FM Leo (dane: ASAS). Dół: Residua dla krzywej zmian blasku dla FM Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.017$ mag. 82
- 4.17 Trójwymiarowy model układu FM Leo dla fazy 0.48. 83
- 4.18 Ścieżki ewolucyjne (kolor czerwony i czarny) dla mas $M_1=1.293 M_\odot$ i $M_2=1.286 M_\odot$ i izochrony (2 mld lat - przerywana linia po lewej stronie wykresu, 3 mld lat - przerywana linia po prawej) dla metaliczności słonecznej ($Z=0.018$) oraz parametry odpowiadające składnikom uzyskanego modelu układu FM Leo. 84
- 4.19 Izochrony osadzone na wykresie zależności jasność V - masa dla różnych wieków (1.5 - 2.5 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.01, 0.014, 0.018$) gwiazd. Czarne punkty oznaczają składniki układu FM Leo. Przy wyznaczaniu jasności V gwiazd układu nie uwzględniono efektu poczerwienienia. 85
- 4.20 Izochrony osadzone na wykresie zależności promień - masa dla różnych wieków: 2, 2.5 i 3 mld lat i metaliczności Słońca ($Z = 0.018$). Czarne punkty oznaczają składniki układu FM Leo. 86
- 4.21 Metoda korelacji krzyżowej jednowymiarowej przy użyciu `fxcor` dla FK Leo. Widoczny jeden pik korelacyjny (źródło: IRAF). 87
- 4.22 Góra: Krzywa prędkości radialnych dla składnika głównego uzyskana metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla FK Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą korelacji jednowymiarowej `fxcor` dla składnika głównego układu FK Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.71$ km/s. 88
- 4.23 Mapy funkcji korelacji dla FK Leo uzyskane na podstawie użycia metody TODCOR. Wartości na osiach odpowiadają prędkościom gwiazd układu. Widoczne maksimum (kolor czerwony) nie odpowiada rzeczywistym wartościom obu prędkości. Poprawny wynik ukryty jest w obecności słabszego maksimum (przecięcie żółtego paska ze słabym paskiem niebieskim znajdującym się w okolicy wartości prędkości $v = -70$ [km/s] (górze) i $v = +100$ [km/s] (dół)). Współrzędne tego pikku odpowiadają wartościom prędkości radialnych obu składników. Na rysunkach zwiększono kontrast w celu uwidocznienia wyników. 91

- 4.24 Góra: Krzywa prędkości radialnych uzyskana metodą TODCOR dla układu FK Leo. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych uzyskanych metodą TODCOR dla obu składników układu FK Leo. Kolorem zielonym zaznaczono residua dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą $\sigma_{f1} = 2.63$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 7.15$ km/s. 92
- 4.25 Góra: Krzywa prędkości radialnych dla układu FK Leo. Dla składnika głównego (mniejsza amplituda) krzywą RV uzyskano na podstawie metody korelacji jednowymiarowej, z kolei dla składnika wtórnego (większa amplituda) - metodą TODCOR. Dół: Residua dla krzywej prędkości radialnych przedstawionej na rysunku 4.25 dla obu składników układu FK Leo. Kolorem zielonym zaznaczono rozrzut dla składnika głównego, czerwonym - dla składnika wtórnego. Średnie błędy formalne pomiarów wynoszą odpowiednio $\sigma_{f1} = 0.71$ km/s oraz $\sigma_{f2} = 7.15$ km/s. 93
- 4.26 Góra: Krzywa zmian blasku dla FK Leo (dane: ASAS). Dół: Residua dla krzywej zmian blasku dla FK Leo. Średni błąd formalny pomiarów wynosi $\sigma_f = 0.027$ mag. 94
- 4.27 Trójwymiarowy model układu FK Leo dla fazy 0.03. 95
- 4.28 Ścieżki ewolucyjne (kolor czarny i czerwony) dla mas $M_1 = 1.425 M_\odot$ i $M_2 = 0.925 M_\odot$ i izochrony dla wieku 1, 1.75, 2 mld lat i metaliczności słonecznej ($Z=0.018$) oraz parametry odpowiadające uzyskanym składnikom modelu układu FK Leo. 96
- 4.29 Izochrony osadzone na wykresie zależności jasność V - masa dla różnych wieków (1.5, 2.2, 2.75 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.014, 0.018$) gwiazd (patrz: legenda). Czarne punkty oznaczają składniki układu FK Leo. Przy wyznaczaniu jasności V gwiazd układu nie uwzględniono efektu poczerwienienia. 97
- 4.30 Izochrony osadzone na wykresie zależności promień - masa dla różnych wieków (2, 2.5, 3 mld lat) i metaliczności ($Z = 0.015, 0.018$) gwiazd (patrz: legenda). Czarne punkty oznaczają składniki układu FK Leo. 98

Spis tabel

2.1	Wyjaśnienie oznaczeń znajdujących się na rysunku 2.2.	27
4.1	Kąty określające cztery promienie składnika.	71
4.2	Parametry modelu układu FM Leo wyznaczone na podstawie krzywej LC i RV uzyskanej za pomocą metody TODCOR.	83
4.3	Parametry modelu układu FK Leo wyznaczone na podstawie krzywej LC i RV uzyskanej za pomocą metody TODCOR oraz korelacji jednowymiarowej.	95

Bibliografia

1. Alexander, D., Ferguson, J. (1994). Low-temperature Rosseland opacities. *ApJ*, 437, 879.
2. Andersen, J. (1991). Accurate masses and radii of normal stars. *A&A Rev*, 3, 91.
3. Andersen, J. (1993). Stellar masses and radii as constraints on stellar models. *ASPC*, 40, 347A.
4. Bertelli, G. (2008). Scaled solar tracks and isochrones in a large region of the Z-Y plane I. From the ZAMS to the TP-AGB end for 0.15 - 2.5 Mo stars. *A&A*, 803, 1460.
5. Binney, J., Merrifield, M., *Galactic Astronomy*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
6. Bouchy, F., Pepe, F., Queloz, D. (2001). Fundamental photon noise limit to radial velocity measurements. *A&A*, 374, 733-739.
7. Bressan, A. (1993). Evolutionary sequences of stellar models with new radiative opacities. II - $Z = 0.02$. *A&AS*, 100, 647-664.
8. Bruton, D. (2004). *Modeling Close Binary Stars* -presentation. Department of Physics and Astronomy, Stephen F. Austin State University, TX.
9. Bruzual, A. (1983). Spectral evolution of galaxies. I - Early-type systems. *ApJ*, 273, 105-127.
10. Claret, A., Gimenez, A. (1992). Evolutionary stellar models using Rogers and Iglesias opacities, with particular attention to internal structure constants. *A&AS*, 96, 255-268.
11. Connes, P. (1985). Absolute astronomical accelerometry. *Ap&SS*, 110, 211-255.

12. Demarque, P., Larson, B. (1964). The age of galactic cluster NGC 188. *Apj*, 140, 544.
13. Demarque, P., McClure, R. (1977). The evolution of galaxies and stellar population, 199.
14. Dimitrow, W. Obserwacje i modelowanie rozdzielonych układów podwójnych - weryfikacja ich odległości i statusu ewolucyjnego. UAM, Poznań, 2007
15. Eggleton, E., (1983). Towards consistency in simple prescriptions for stellar convection. *MNRAS*, 204, 449-461.
16. Green, E., Demarque, P., King, C. (1987). The revised Yale isochrones and luminosity functions. *New Heaven: Yale Univ. Obs.*
17. Grevesse, N., Noels, A. (1993). *Origin and Evolution of the Elements*, Cambridge University Press, Cambridge, 14.
18. Gunn, J., Stryker, L., Tinsley, B. (1981) .Evolutionary synthesis of the stellar population in elliptical galaxies. III - Detailed optical spectra. *ApJ*, 249, 48-67.
19. Hall, D., *Light Curves of Variable Stars - A Pictorial Atlas*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
20. Hilditch, R.W, *An Introduction to Close Binary Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
21. Iben, I., Jr. (1974). Post Main Sequence Evolution of Single Stars. *ARA&A*, 12, 215.
22. Iglesias, C., Rogers, F. (1996). Updated Opal Opacities. *ApJ*, 464, 943.
23. Kallrath, J., Milone, E.F, *Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis*. Springer, 1999.
24. Kendall, M., Stuart, A. *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2. Griffin, London, 1967.
25. Kreiner, J. (2004). Up-to-Date Linear Elements of Eclipsing Binaries. *AcA*, 54, 207-210.
26. Kubiak M., *Gwiazdy i materia międzygwiazdowa*. PWN, Warszawa, 1994.
27. Kurucz, R. (1979). Model atmospheres for G, F, A, B, and O stars. *ApJS*, 40, 1-340.

28. Kurucz, (1991). Precision Photometry: Astrophysics of the Galaxy, 27.
29. Lada, C. (2006). Stellar Multiplicity and the Initial Mass Function: Most Stars Are Single. *ApJ*, 640L, 63L.
30. Lastennet, E. (2002). Detached double - lined eclipsing binaries as critical tests of stellar evolution. *A&A*, 396, 551-580.
31. Lejeune, T., Cuisinier, F., Buser, R. (1997). Standard stellar library for evolutionary synthesis. I. Calibration of theoretical spectra. *A&A*, 125, 229.
32. Maeder, A., Meynet G. (1988). Tables of evolutionary star models from 0.85 to 120 solar masses with overshooting and mass loss. *A&AS*, 76, 411.
33. Mayor, M., Queloz, D. (1995). A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star. *Nature*, 378, 355.
34. Murdoch, K., Hearnshaw, J. (1991). The precision of radial-velocity determinations of solar-type stars by cross-correlation. *Ap&SS*, 186, 137-149.
35. Perryman, P. (1997). Recent Results from HIPPARCOS. *AAS*, 191, 6801.
36. Pickles, A. (1985). Differential population synthesis of early-type galaxies. III - Synthesis results. *ApJ*, 296, 340-169.
37. Pojmański, G. (1997). The All Sky Automated Survey. *AcA*, 47, 467-481.
38. Press, W.H, Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
39. Prieto, C., Lambert, D. (1999). Fundamental Parameters of Nearby Stars from the Comparison with Evolutionary Calculations: Masses, Radii and Effective temperatures. *A&A*, 9911, 2v1.
40. Prsa, A., PHOEBE - Scientific Reference. University of Ljubljana, Ljubljana, 2006.
41. Renzini, A. (1987). Some embarrassments in current treatments of convective overshooting. *A&A*, 188, 49-54.
42. Rogers, F., Iglesias, C. (1995). Astrophysical Applications of Powerful New Databases. San Francisco, 78.
43. Rogers, F., Swenson, F., Iglesias, C. (1996). OPAL Equation-of-State Tables for Astrophysical Applications. *ApJ*, 456, 902.
44. Rossitier, R. (1924). On the detection of an effect of rotation during eclipse in the velocity of the brighter component of beta Lyrae, and on the constancy of velocity of this system. *ApJ*, 60, 15-21.

45. Schaller, G. (1992). New grids of stellar models from 0.8 to 120 solar masses at $Z = 0.020$ and $Z = 0.001$. *A&AS*, 96, 269-331.
46. Shaviv, G., Salpeter, E. (1973). Convective Overshooting in Stellar Interior Models. *ApJ*, 184, 191.
47. Shu, F., Galaktyki, Gwiazdy, Życie. Prószyński i S-ka, Warszawa, 2003.
48. Simkin, S. (1974). Measurements of Velocity Dispersions and Doppler Shifts from Digitized Optical Spectra. *A&A*, 31, 129.
49. Svechnikov, M. (1984). The mass-spectrum relation for main-sequence stars. *AZh*. 61, 143-151.
50. Tinsley, P. (1980). Evolution of the Stars and Gas in Galaxies. *Fundamentals of Cosmic Physics*, 5, 287.
51. Thoul, A., Bahcall, J., Loeb, A. (1994). Element diffusion in the solar interior. *ApJ*, 421, 828.
52. Tonry, J., Davis, M. (1979). A survey of galaxy redshifts. I - Data reduction techniques. *AJ*, 84, 1511-1525.
53. Wilson, R., Devinney, E. (1971). Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni. *ApJ*, 166, 605.
54. Vandenberg, D., (1983). Star clusters and stellar evolution. I - Improved synthetic color-magnitude diagrams for the oldest clusters. *ApJS*, 51, 29.
55. Yi, S. (2001). Toward Better Age Estimates for Stellar Populations: The Y2 Isochrones for Solar Mixture. *ApJs*, 136, 417-437.
56. Zahn, J. (1975). Differential Rotation and Turbulence in Stars. *MSRSL*, 8, 31-34.
57. Zahn, J. (1977). Tidal friction in close binary stars. *A&A*, 57, 383-394.
58. Zucker, S., Mazeh, T. (1994). Study of spectroscopic binaries with TODCOR. *ApJ*. 420, 806-810.
59. Zucker, S. (2003). Cross-correlation and maximum-likelihood analysis: a new approach to combining cross-correlation functions. *MNRAS*, 342, 1291-1298.