

Fizyka Atmosfer Gwiazd

Alex Schwarzenberg-Czerny

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

i

Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Adama Mickiewicza

alex@camk.edu.pl

wrzesień 2002

Spis treści

1	Wstęp czyli co to są atmosfery i na co się przydaje wiedza o nich?	6
2	Poznajemy podstawowe pojęcia	10
2.1	Kinetyczne podstawy teorii atmosfer	10
2.1.1	Funkcja rozkładu	10
2.1.2	Momenty równania Boltzmann	11
2.1.3	Płaska atmosfera w równowadze statycznej	12
2.1.4	Konwekcja	13
2.2	Rodzaje równowagi termodynamicznej	14
2.2.1	Pełna Równowaga Termodynamiczna (RT)	14
2.2.2	Lokalna równowaga termodynamiczna (LRT)	15
2.2.3	Lokalna nierównowaga termodynamiczna (LNRT)	16
2.3	Charakterystyka promieniowania	16
2.3.1	Natężenie promieniowania	16
2.3.2	Gęstość promieniowania	17
2.3.3	Momenty natężenia promieniowania	17
2.3.4	Momenty w atmosferze płasko-równoległej	18
2.4	Proste rozkłady kątowe promieniowania	18
2.4.1	Promieniowanie izotropowe	18
2.4.2	Izotropowo świecąca półprzestrzeń	18
2.4.3	Dwa promienie	19
2.5	Promieniowanie w RT: Rozkład Plancka	20
2.5.1	Kwantowa natura promieniowania	20
2.5.2	Gęstość stanów	20
2.5.3	Średnia energia stanu	21
2.5.4	Rozkład Plancka	21
2.5.5	Prawo Stefana-Boltzmann	21
2.6	Oddziaływanie promieniowania z materią	22
2.6.1	Współczynniki emisji i absorpcji	22
2.6.2	Grubość optyczna	22
2.6.3	Fizyczne mechanizmy emisji i absorpcji	24

2.6.4	Funkcja źródłowa	24
3	Równanie transferu i jego rozwiązania formalne	26
3.1	Równanie transferu	26
3.1.1	Przypadek ogólny	26
3.1.2	Statyczne atmosfery 1-wymiarowe	26
3.2	Momenty równania transferu	27
3.2.1	Przypadek ogólny	27
3.2.2	Atmosfera płasko-równoległa	28
3.2.3	Metoda czynników Eddingtona	28
3.3	Formalne rozwiązania r. transferu	29
3.3.1	Ośrodek bez emisji i absorpcji	29
3.3.2	Ośrodek bez absorpcji	29
3.3.3	Ośrodek bez emisji	29
3.3.4	Ogólne rozwiązanie formalne	30
3.3.5	Atmosfera pół-nieskończona	30
3.3.6	Rozwiązanie Barbier-Eddingtona	30
3.3.7	Warstwa jednorodna	31
3.4	Przybliżenie dyfuzyjne	31
3.4.1	Rozwinięcie natężenia w szereg Taylora	31
3.4.2	Momenty	31
3.4.3	Równanie promienistego transportu ciepła	32
3.4.4	Transport energii i średnia Rosselanda	32
3.5	Operatory i całkowita postać r. transferu	33
3.5.1	Całkowa funkcja wykładnicza	33
3.5.2	Operatory momentów	33
3.5.3	Reprezentacja dyskretnych warstw	35
4	Proste modele atmosfer	37
4.1	Atmosfera szara	37
4.1.1	Momenty r. transferu	37
4.1.2	Równowaga promienista	37
4.1.3	Funkcja Hopfa	38
4.2	Rozwiązania dla atmosfery szarej	39
4.2.1	Przybliżenie Eddingtona	39
4.2.2	Rozwiązanie Chandrasekhara	41
4.2.3	Widmo atmosfery szarej	42
4.3	Atmosfera prawie szara	44
4.4	Atmosfery nieszare: grzanie i chłodzenie	45
4.4.1	Przybliżenie Barbier-Eddingtona	45
4.4.2	Skokowe pochłanianie	47

4.4.3	Efekt przesłaniania (blankettingu)	47
5	Oddziaływanie promieniowania z materią	54
5.1	Równowaga promienista a rozkład temperatury	54
5.1.1	Iteracje lokalne	54
5.1.2	Metoda Unsoelda-Lucyego	55
5.1.3	Metoda Avretta-Krooka	56
5.1.4	Inne	57
5.2	Fizyka oddziaływania promieniowania z materią	57
5.2.1	Profile linii	57
5.2.2	Mechanizmy poszerzenia linii	61
5.2.3	Rodzaje przejść atomowych	62
5.2.4	Współczynniki Einsteina	65
5.2.5	Atom 2-poziomowy	66
5.2.6	Redystrybucja fotonów	66
5.2.7	Funkcja źródłowa	68
5.2.8	Dowód postaci S_ν^L	71
5.3	Proste modele linii widmowych LRT	72
5.3.1	Linie Rozpraszające: Model Schustera-Schwarzschilda	72
5.3.2	Linie Pochłaniające: Model Milne -Eddingtona	74
5.3.3	Krzywa wzrostu	76
5.4	Proste modele linii widmowych LNRT	81
5.4.1	Operatorowa postać równania transferu	81
5.4.2	Ucieczka fotonów z centrum linii	81
5.4.3	Ucieczka fotonów w skrzydło linii	83
5.4.4	Głębokość termalizacji	84
6	Obliczenia modeli atmosfer	86
6.1	Pełny układ równań atmosfery LNRT	86
6.1.1	Równania	86
6.1.2	Funkcje materiałowe	86
6.1.3	Model atmosfery	87
6.2	Metody rachunkowe	87
6.2.1	Wstęp	87
6.2.2	Metoda schodkowa (I-szego rzędu)	90
6.2.3	Metody II rzędu	91
6.2.4	Przybliżone Λ iteracje	94
6.2.5	Przyśpieszanie zbieżności	96

7	Wyniki i ich zastosowania	99
7.1	Przegląd wyników rachunków	99
7.1.1	Modele LTE	99
7.2	Zastosowania modeli atmosfer	104
7.2.1	Synteza widm	108
7.2.2	Porównanie Teorii z Teorią	109
7.2.3	Fundamentalne parametry gwiazd	109

Od Autora słów kilka

Z wahaniem udostępniam niniejszy, jeszcze nie ukończony skrypt, z tekstem i rysunkami wymagającymi poprawek. Mam jednak nadzieję, że i w obecnej formie skrypt Fizyki Atmosfer Gwiazd umożliwi studentom uzupełnienie wiedzy z notatek do wykładu. Mam nadzieję, że w przyszłości uda się wytropić i usunąć wszelkie niedostatki. Pisząc skrypt oparłem się na notatkach z wykładu który od kilku lat prowadzę na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oraz na podstawie literatury wyliczonej dalej w tekście. Jego przygotowanie w stosunkowo krótkim czasie nie byłoby możliwe bez pomocy studentów przy korekcie oraz dr. Naskręckiego i mgr. Ratajczaka przy ilustracjach. Skrypt nigdy nie zastąpi dobrego podręcznika. Takich podręczników jest kilka w języku angielskim co dziś nie stanowi bariery dla polskich studentów i nie ma potrzeby produkować jeszcze jednego. Prof. Stępień, na którego wykładach uczyło się całe pokolenie polskich astronomów wydał przed laty doskonały skrypt fizyki atmosfer i z części które nie straciły aktualności korzystałem przygotowując swój wykład. Z drugiej strony podręczniki są często przegadane i przeładowane szczegółami. W fizyce atmosfer dotyczy to zwłaszcza świetnej skądinąd książki Mihalasa, która jest doskonałym kompendium dla badaczy. Natomiast dla studentów zaletą wszelkich skryptów jest większa kondensacja materiału. Drugą zaletą skryptów w dobie komputeryzacji jest możliwość łatwej aktualizacji. Toteż oddając ten skrypt w ręce czytelnika mam nadzieję, że nie jest to jego wersja ostatnia i w tym świetle proszę o wyrozumiałość.

Poznań i Warszawa, 2002.

Rozdział 1

Wstęp czyli co to są atmosfery i na co się przydaje wiedza o nich?

Pytanie co to jest za przedmiot i po co mam się jego uczyć w sposób naturalny przychodzi do głowy świeżo upieczonemu studentowi fizyki atmosfer. Poza najbliższymi opłotkami układu Słonecznego cała nasza wiedza o otaczającym Wszechświecie pochodzi z analizy docierającego światła. Ponieważ gwiazdy stanowią znakomitą większość źródeł światła w Kosmosie, naturalnym jest zainteresowanie astronomów mechanizmem świecenia gwiazd. Docierające do nas światło jest wysyłane przez peryferyjne warstwy gwiazdy czyli jej atmosferę. Stąd się wywodzi nazwa przedmiotu. Atmosfera gwiazdy stanowi skomplikowany przykład mieszaniny światła i materii gazowej oddziałujących ze sobą wzajemnie. Ta wzajemność oddziaływania stanowi zresztą podstawowy problem w badaniu fizyki atmosfer.

Prócz zainteresowania atmosferami jako poznaniem złożonego zjawiska astronomami kierowały też motywy bardziej użyteczne. Mianowicie poznanie za pomocą obserwacji parametrów gwiazd i zrozumienie ich wnętrza nie jest możliwe bez dobrego rozumienia atmosfery będącej źródłem obserwowanego promieniowania. W oparciu o fizykę atmosfer rozwinięto metody wyznaczania temperatur, grawitacji oraz składu chemicznego gwiazd. Znajomość atmosfer przydaje się także w badaniu materii międzygwiazdowej. Okazało się, że nawet spokojne gwiazdy intensywnie oddziałują z otaczającą materią międzygwiazdową, wysyłając jonizujące promieniowanie ultrafioletowe jak i zasilając materię wiatrem gwiazdowym. W badaniach obiektów leżących na dalszych krajach Wszechświata, takich jak gromady gwiazd i galaktyki potrzebne są dobre modele widma wysyłanego przez nie promieniowania. Takie modele tworzy się w oparciu o modele atmosfer różnych rodzajów gwiazd wchodzących w ich skład.

Dla fizyków i techników, których uwaga jest skupiona na sprawach znacznie bliższych niż gwiazdy, teoria atmosfer przedstawia jedno z pierwszych skutecznych

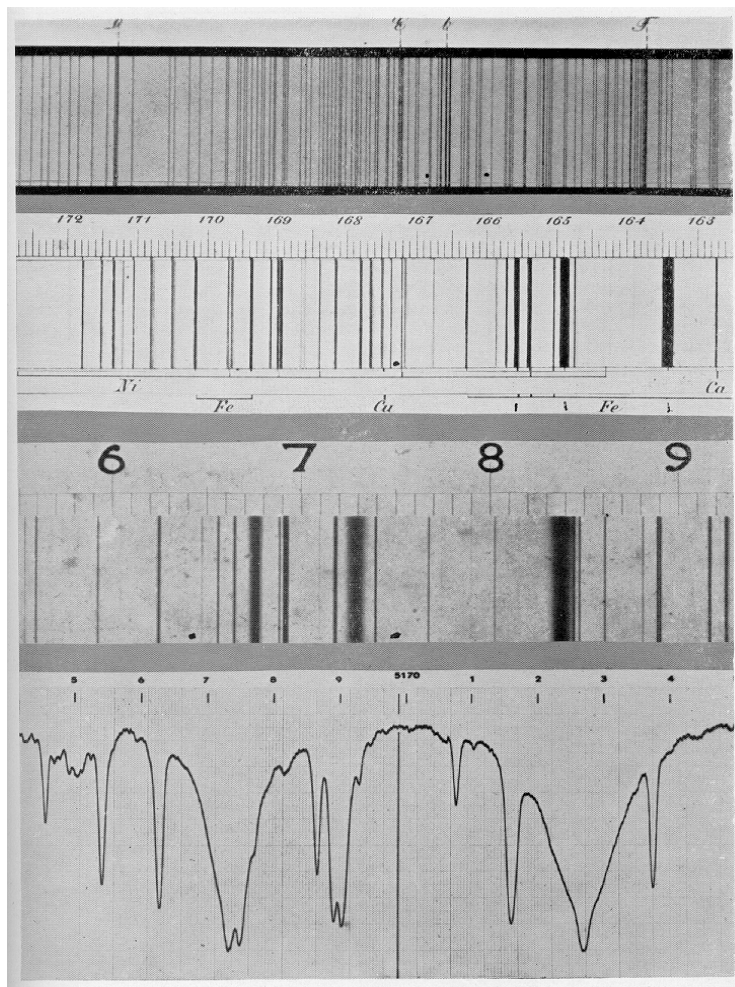


Figure 1.3: Segments of four solar spectrum atlases, respectively the engravings by Fraunhofer (top, 1815) and Kirchhoff (1861), the photographic Rowland atlas (1897) and the Utrecht intensity atlas (1940). The top segment has wavelength increasing to the left. The black dots in the first three segments mark the extent of the next segment. The three strongest lines in the second and third segments constitute the MgIb triplet in the green part of the spectrum; Fraunhofer marked them b at the top of the figure. The NaI D lines are marked by a beautifully written *D* at left, here cut off by Pannekoek's bounding box but present with Fraunhofer's solar energy distribution in Figure 2.4 of Hearnshaw (1986). In the bottom segment, the lefthand MgIb line is blended with an overlapping FeI line. The righthand one displays a distinct transition between Doppler core and damping wings. From Pannekoek (1961).

Rysunek 1.1: Przykłady obserwacji widm Słońca w różnych epokach rozwoju astrofizyki: odcięte rysunki Fraunhofera (a, 1815) i Kirchhoffa (b, 1861); fragmenty fotograficznego atlasu Rowlanda (c, 1897) oraz atlasu widma Słońca z Utrechtu (1940) (Rys. z Pannekoek 1940).

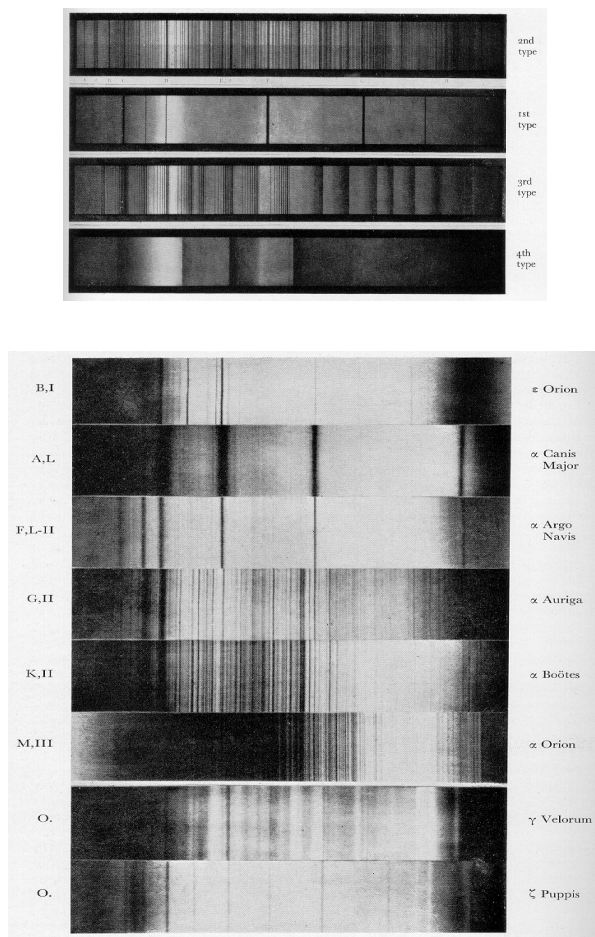


Figure 1.5: Spectral classifications. *Top*: Secchi's (1864) four-category scheme. The upper spectrum illustrates type 2 yellow solar-like spectra with many fine lines (Capella, Procyon, Arcturus, Aldebaran). The second spectrum (Secchi type 1) represents white or bluish-white Sirius-like stars with four strong hydrogen lines. The third (type 3) is Betelgeuse-like, with wide bands. The fourth (type 4) was a rare class of faint dark-red stars with fuzzy bands that Secchi correctly identified as having to do with carbon. *Bottom*: Harvard classification. At the bottom, ζ Puppis displays the Pickering series (at least on Pannekoek's non-fringed print). From Pannekoek (1961).

Rysunek 1.2: Rozwój klasyfikacji widmowej gwiazd: (a) widma 4 klas w.g. Secchi'ego (1864); (b) Harwardzka klasyfikacja widm (Rys. z Pannekoek 1940).

rozwiązań zagadnienia transportu (dyfuzji) w złożonych warunkach. Opracowane i wszechstronnie wypróbowane przez astronomów metody (n.p. ALI) nadają się także do zastosowania nawet przy skomplikowanej 3-wymiarowej geometrii zagadnienia.

Proponowana literatura:

Collins, G.W., 1989, The Fundamentals of Stellar Astrophysics, Freeman.

Hubeny, I. Stellar Atmospheres, European Astrophysics Doctoral Network 9th Summer School, http://***

Rutten Radiative Transfer in Stellar Atmospheres, <http://www.astro.uu.nl/~rutten/tmr>

Stepien, K. Fizyka Atmosfer, Uniw. Warsz., skrypt

Rozdział 2

Poznajemy podstawowe pojęcia

2.1 Kinetyczne podstawy teorii atmosfer

2.1.1 Funkcja rozkładu

Typowe warunki panujące w atmosferach gwiazd to temperatury T w przedziale $10^3 - 10^5$ oraz gęstości n rzędu $10^6 - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Dla rozrzedzonych gazów w astrofizyce często podaje się nie zwykle gęstości ρ w.g. masy na objętość, w g/cm^{-3} , ale jak to tutaj zrobiono w ilości cząsteczek n na objętość czyli w cm^{-3} . Związek obu gęstości jest prosty: $\rho = mn$ gdzie m oznacza średnią masę cząsteczki. W takich warunkach gaz jest częściowo lub całkowicie zjonizowany a istotna część oddziaływania cząsteczek między sobą odbywa się na drodze wzajemnych zderzeń. Pomiedzy zderzeniami cząsteczki poruszają się z prędkością $\bar{u} = \bar{p}/m$ i działa na nie zewnętrzna siła \bar{F} , n.p. siła grawitacji. Stan pojedynczej cząsteczki w momencie t można określić podając jej wektory położenia \bar{r} i pędu \bar{p} . Stan gazu można opisać za pomocą funkcji rozkładu f_i podającej ilość dn_i (gęstość) cząsteczek i -tego rodzaju o podobnych parametrach w przedziałach położenia d^3r i pędów d^3p :

$$dn_i = f_i(t, \bar{r}, \bar{p}) d^3r d^3p \quad (2.1)$$

To ostatnie równanie można przyjąć za definicję funkcji rozkładu. Wygodnie jest wprowadzić 6-wymiarową przestrzeń położeń \bar{r} i pędów \bar{p} , zwaną przestrzenią fazową. Wówczas $d^3r d^3p$ jest elementem objętości przestrzeni fazowej a f jest gęstością cząstek w tej przestrzeni. Cząsteczki przemieszczają się w przestrzennych kierunkach przestrzeni fazowej z prędkością $\bar{u} = \partial\bar{r}/\partial t$ a zmiana ich pędów odbywa się z prędkością zadaną przez działającą na nie siłę $\bar{F} = \partial\bar{p}/\partial t$. Ewolucję funkcji rozkładu f opisuje równanie Boltzmanna:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla_{\bar{r}}) f_i + (\bar{F} \cdot \nabla_{\bar{p}}) f_i = \left(\frac{Df_i}{Dt} \right)_{zd} \quad (2.2)$$

gdzie przez $\nabla_{\vec{r}}$ i $\nabla_{\vec{p}}$ oznaczyliśmy gradienty odpowiednio w przestrzeni położeń i pędów. Dwa wyrazy na początku są analogiczne do równania ciągłości w hydrodynamice. Równanie to odzwierciedla zachowanie masy. W naszym wypadku mamy doczynienia z zachowaniem liczby cząsteczek w przestrzeni fazowej. O ile ich gęstość w jakimś stanie zmienia się w czasie (pierwszy wyraz) to musi być to kompensowane dopływem lub odpływem cząsteczek w przestrzeni położeń (drugi wyraz) lub w przestrzeni pędów (trzeci wyraz). Wyrazy 2 i 3 są dokładnymi analogami w przestrzeni położeń i pędów. O ile lewa strona opisuje ewolucję f wskutek łagodnych zmian parametrów cząstek to prawa strona równania Boltzmana uwzględnia pojawianie się lub znikanie nowych cząstek w danym stanie wskutek zderzeń, które zmieniają skokowo stan cząstki.

Funkcja rozkładu i równanie Boltzmana stanowią podstawę teorii kinetycznej. Teoria kinetyczna stanowi solidny fundament do dyskusji wszelkich zagadnień hydrodynamiki i transportu energii przez materię i promieniowanie. W toku wykładu pokażemy, że podstawowe dla atmosfer gwiazd równanie transferu promieniowania można wyprowadzić z czysto fenomenologicznych rozważań. Jednak przy dyskusji ogólniejszych zagadnień transferu argumenty fenomenologiczne zawodzą i należy się odwołać do teorii kinetycznej. Dlatego zaczynamy od przedstawienia zarysu metod teorii kinetycznej. Szczegółowa dyskusja teorii znacznie wykracza poza zasięg niniejszego wykładu. Jest ona wyczerpująco omówiona w specjalistycznych podręcznikach, n.p. Lifshitz i Pitajewski (1993).

2.1.2 Momenty równania Boltzmana

Bardzo użyteczne równania hydrodynamiki otrzymuje się jako momenty r . Boltzmana. Momenty te oblicza się mnożąc obie strony przez k -tą potęgę pędu i całkując po całej przestrzeni pędów i sumując po rodzajach cząstek. Dla wprawy zaczniemy od zerowego i pierwszego momentu samego f . W ten sposób otrzymujemy zwykłą gęstość ρ oraz prędkość makroskopową \bar{v} :

$$\rho = \sum_i m_i n_i = \sum_i m_i \int p^0 f_i d^3 p \quad \text{gdzie} \quad (2.3)$$

$$n_i = \int p^0 f_i d^3 p \quad (2.4)$$

$$\rho \bar{v} = \sum_i \int \vec{p} f_i d^3 p \quad (2.5)$$

To ostatnie równanie można uznać za definicję prędkości makroskopowej jako średniej po prędkościach (pędach) mikroskopowych. Zakładamy tu że prędkość \bar{v} wszystkich rodzajów cząstek jest ta sama. Licząc zerowy moment r . Boltzmana

bez sumowania po cząstkach mamy

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \bar{v}) = \left(\frac{Dn_i}{Dt} \right)_{zd} \quad (2.6)$$

Wyraz odpowiadający całce $\nabla_{\bar{v}}$ na podstawie tw. Gaussa-Greena-Ostrogradzkiego został zamieniony na znikającą całkę po dalekim brzegu obszaru. Wobec tego pomijamy indeksy przy symbolach ∇ bo w momentach zawsze odnoszą się do zwykłej przestrzeni. Z podobnych powodów by przekształcić drugi wyraz można było dodać do niego znikający wyraz $n_i \nabla \bar{v}$. Licząc 0, 1 i 2 momenty r. Boltzmannna ze sumowaniem po i po podobnych operacjach otrzymujemy równania ciągłości, zachowania pędu i energii. Ponieważ w zderzeniach (elastycznych) cząstek jest zachowana całkowita ilość cząstek, ich pęd i energia, człony zderzeniowe momentów znikają:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad \text{r. ciągłości} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v^2) = -\nabla P + \bar{f} \quad \text{r. zach.pędu} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + P \right) \bar{v} \right] = \\ \bar{f} \cdot \bar{v} - \nabla \cdot (\bar{\mathcal{F}}_{rad} + \bar{\mathcal{F}}_{cond}) \quad \text{r. zach.pędu} \end{aligned} \quad (2.9)$$

W równaniach (2.7) i (2.8) pojawiły się nowe wyrazy zależne nie od prędkości makroskopowej \bar{v} lecz od momentów prędkości własnej cząstek $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$:

$$P_{kl} = \langle m w_k w_l \rangle \quad \text{tensor ciśnień} \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \frac{\langle m w^2 \rangle}{2\rho} \quad \text{energia wewnętrzna} \quad (2.11)$$

Wyrazy te wzięły się z uśrednienia potęg prędkości rozłożonej na $u = v + w$. Przy tym wyrazy mieszane vw znikają na mocy warunku $\langle u \rangle = v$ czyli $\langle w \rangle = 0$. Siła \bar{f} oznacza uśrednione siły zewnętrzne. Na koniec wyrazy ze strumieniami energii promieniowania $\bar{\mathcal{F}}_{rad}$ i przewodzenia $\bar{\mathcal{F}}_{cond}$ to są przeniesione na drugą stronę wyrazy analogiczne do wyrazu w nawiasie kwadratowym ale dotyczące cząstek o znikomej masie i odmiennych prędkościach (odpowiednio fotonów i elektronów).

2.1.3 Płaska atmosfera w równowadze statycznej

W równowadze statycznej pochodne po czasie znikają, zatem

$$\frac{\partial}{\partial t} = v = \left(\frac{D}{Dt} \right)_{zd} = 0 \quad (2.12)$$

W atmosferze płaskiej $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ i pozostaje różniczkowanie po z . Mamy zatem następujące warunki:

$$\left(\frac{Dn_i}{Dt}\right)_{zd} = 0 \rightarrow n_i = const \text{ r. statystyczna} \quad (2.13)$$

$$\nabla P = \bar{f} \rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g \text{ r. hydrostatyczna} \quad (2.14)$$

$$\nabla \mathcal{F}_{rad} = 0 \rightarrow \mathcal{F}_{rad} = const \text{ r. promienista} \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

W ostatnim równaniu pominęliśmy strumień przewodzenia ciepła \mathcal{F}_{cond} bo rozrzedzone gazy w atmosferze praktycznie nie przewodzą ciepła.

W naszej dyskusji zupełnie opuściliśmy równanie kinetyczne fotonów. Inaczej zwie się ono równaniem transferu promieniowania i będzie naszym przedmiotem zainteresowania w całym wykładzie.

2.1.4 Konwekcja

Czasem w atmosferze powstają warunki w których nie przemieszcza się ona jako całość ale sąsiadujące elementy gazu (bąble, wiry) są w ruchu i n.p. zamieniają się miejscami. Takie zjawisko to konwekcja. Może ona przenosić energię. Matematycznie skutek istnienia pola prędkości prądów konwektywnych uśredniony nawias kwadratowy w r. energii dla statycznej atmosfery nie znika przyjmując wartość oznaczoną $\nabla \mathcal{F}_{conv}$. Wówczas zmodyfikowany warunek równowagi promienistej ma postać

$$\mathcal{F}_{rad} + \mathcal{F}_{conv} = const \quad (2.17)$$

O ile konwekcja jest zjawiskiem powszechnym w życiu codziennym, o tyle skutecznie opiera się opisowi matematycznemu podobnie jak pokrewne zjawiska turbulencji i wirów i wszelkie inne ruchy nieuporządkowane. Teoretycznie powinny stosować się do niej normalne równania hydrodynamiki i termodynamiki przepływu. W praktyce nie jesteśmy w stanie śledzić każdego wiru a w dodatku jest wątpliwe czy takie rachunki byłyby stabilne. Z braku lepszej teorii astronomowie odwołują się do fenomenologicznej teorii drogi mieszania opartej na nie do końca udowodnionych założeniach i co gorsze obciążonej co najmniej jednym parametrem o nie znanej z góry wartości. Konwekcja i teoria drogi mieszania będą omawiane dokładniej na wykładzie z fizyki wnętrza gwiazd.

2.2 Rodzaje równowagi termodynamicznej

2.2.1 Pełna Równowaga Termodynamiczna (RT)

Równowaga termodynamiczna (pełna) (RT) wymaga jednolitej temperatury T w całym układzie i stałości w czasie pozostałych parametrów stanu (n.p. n). Mikroskopowo RT ustala się wskutek wymiany i uśrednienia energii cząsteczek we wzajemnych oddziaływaniach (n.p. zderzeniach). Układ ewoluuje do stanu w którym ilość przejść w obie strony R_{ij} i R_{ji} pomiędzy każdą parą stanów o numerach i i j jest dokładnie ta sama $R_{ij} = R_{ji}$. Jest to t.zw. równowaga szczegółowa. W szczególności w RT rozkład cząstek między każdą parą poziomów energetycznych jest rozkładem Boltzmanna (nie mylić z równaniem Boltzmanna o którym mowa była wcześniej):

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}} \quad (2.18)$$

gdzie n_i i n_j są gęstością (obfitością) cząsteczek w tych stanach, E_i i E_j ich energią a g_i i g_j to wagi statystyczne czyli ilości różnych stanów cząsteczki odpowiadających tej samej energii. Rozkład Boltzmanna stosuje się do relacji między wszelkimi stanami w RT, a więc do rozkładu cząsteczek o różnych prędkościach (różnych energiach kinetycznych) $dn(\bar{v})/n$, w różnych stanach jonizacji n_{I+1}/n_I a także do gęstości energii u_ν fotonów o różnych energiach $h\nu$. Odpowiednie energie to $mv^2/2$ energia kinetyczna cząsteczki, χ_I - energią I -tej jonizacji oraz energia fotonu $h\nu$. Ponieważ w każdej z tych 3 sytuacji cząsteczki mogą obsadzać kontinuum stanów o różnych energiach wyliczenie odpowiednich wag statystycznych wymaga dodatkowych rozważań. Zamiast tego podamy gotowe wyniki. Odpowiednie rozkłady zwane są rozkładami Maxwella, Sahy i Plancka.

$$\frac{dn(\bar{v})}{n} = f(\bar{v})d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3v \quad \text{r. Maxwella} \quad (2.19)$$

$$\frac{n_{I+1}n_e}{n_I} = \frac{2U_{I+1}}{U_I} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_I}{kT}} \quad \text{r. Sahy} \quad (2.20)$$

$$u_\nu d\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad \text{r. Plancka} \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

Masy atomu i elektronu oznaczyliśmy m i m_e a n_e jest gęstością elektronów. Ta ostatnia pojawia się dlatego, że ilość różnych realizacji stanu jonizacji jest proporcjonalna do ilości par jon-elektron, czyli do $n_{I+1}n_e$. Przez U w rozkładzie Sahy oznaczyliśmy t.zw. funkcję podziału czyli sumaryczną wagę statystyczną wszystkich poziomów w atomie. Jej obliczenie nie jest proste, jako że samych

poziomów w każdym atomie jest nieskończoność. Należy sumować wagi pojedynczych poziomów g_i razy prawdopodobieństwo ich obsadzenia p_i , czyli $U = \sum_i p_i g_i e^{-E_i/kT}$. W wysokich stanach elektrony są zdala od jądra i takie stany bardzo łatwo są niszczone wskutek zderzeń. Toteż p_i zależą od koncentracji atomów. Swobodny elektron w stanie jonizacji może mieć 2 orientacje spinu i stąd odpowiednia funkcja podziału jest 2. Rozkładem Plancka zajmiemy się szczegółowo później.

2.2.2 Lokalna równowaga termodynamiczna (LRT)

W atmosferach gwiazd RT nie jest możliwa bo światło (fotony) uciekają z powierzchni powodując przepływ energii na zewnątrz. Makroskopowo przepływ energii wymaga spadku temperatury, co jest sprzeczne z RT. Mikroskopowo wskutek ucieczki proces wysyłania fotonów nie jest w pełni równoważony ich absorpcją czyli brak jest równowagi szczegółowej. W konsekwencji mamy na skraju atmosfery całą sekwencję różnych stanów termodynamicznych na skraju atmosfery. Co więcej, nawet w jednym miejscu różne rodzaje materii i promieniowania mogą być w niekompatybilnych stanach termodynamicznych.

Jeśli mimo ucieczki fotonów materia w każdym miejscu znajduje się w takim stanie jak w RT ale o temperaturze T różnej z miejsca na miejsce, mówimy o lokalnej równowadze termodynamicznej (LRT). Konsekwencją LRT jest możliwość opisanie stanu całej materii w danym punkcie jedną wartością T . W szczególności w LRT cząstki spełniają charakterystyczne dla RT rozkład prędkości Maxwella, rozkład wzbudzeń atomów Boltzmanna (nie mylić z równaniem Boltzmana dla funkcji rozkładu) oraz rozkład stopni jonizacji atomów Sahy, dla ustalonej w danym punkcie przestrzeni temperatury T . W innych punktach T jest inne.

W LRT cząstki pozostają w stanie zgodnym z równowagą termodynamiczną natomiast fotony nie. Niejako z definicji zasięg fotonów w atmosferze jest długi, bo muszą one mieć szansę ją opuścić, wobec tego nie osiągają one nigdy stany równowagi termodynamicznej. Zasięg cząstek w atmosferze pomiędzy zderzeniami jest zwykle tak krótki, że praktycznie nie odczuwają one zmian temperatury w okolicy. To czy w wyniku zderzeń ustali się wśród nich LRT zależy od tego który proces dominuje: wzajemne zderzenia cząstek czy oddziaływanie cząstek z fotonami. Procesy pierwszego rodzaju przywracają LRT, te drugie ją niszczą. Toteż w gwiazdach LRT ma szansę zaistnieć w głębszych, gęstszych warstwach atmosfery gdzie łatwo o zderzenia cząstek. Z tych warstw na zewnątrz wysyłane są jedynie fotony w widmie ciągłym, bo tylko w tych częściach widma absorpcja jest mniejsza i fotony mogą uciekać z większych głębokości. W LRT zasada równowagi szczegółowej odnosi się wyłącznie do procesów bez udziału fotonów.

2.2.3 Lokalna nierównowaga termodynamiczna (LNRT)

Gdy nie zachodzi LRT mamy do czynienia z lokalną nierównowagą termodynamiczną (LNRT). W LNRT różne rodzaje atomów czy też różne poziomy w atomach mogą mieć obsadzenie niezgodne z jedną wartością temperatury. Innymi słowy nie spełnione mogą być zarówno rozkłady Sahy dla jonizacji jak i Boltzmanna dla obsadzeń poziomów (nie mylić z równaniem Boltzmana dla funkcji rozkładu). Rozkład Maxwella jest spełniony prawie zawsze. Jak powiedzieliśmy, głębsze warstwy atmosfery sprzyjają LRT. Znaczną rolę LNRT odgrywa w warstwach płytszych. W tych warstwach powstają najsilniejsze linie bowiem odpowiadające im fotony mają większe szanse wydostania się na zewnątrz tylko z płytkich warstw.

2.3 Charakterystyka promieniowania

Zadaniem teorii atmosfer jest odtworzenie funkcji rozkładu promieniowania (fotonów) w całej atmosferze. W tym celu będziemy traktować fotony jako cząstki i oprzemy się na równaniu transferu, analogicznym do równania Boltzmana w teorii kinetycznej. Efekty falowe fotonów ujawniają się jedynie w zakresach dalekiej podczerwieni i radiowej, które nie będą nas interesowały. Główna komplikacja polega na silnym wzajemnym oddziaływaniu promieniowania z materią co wymaga równoczesnego rozwiązywania dla nich odpowiednich równań kinetycznych. Tutaj zajmiemy się charakterystyką promieniowania a oddziaływaniu z materią poświęcimy następny paragraf.

2.3.1 Natężenie promieniowania

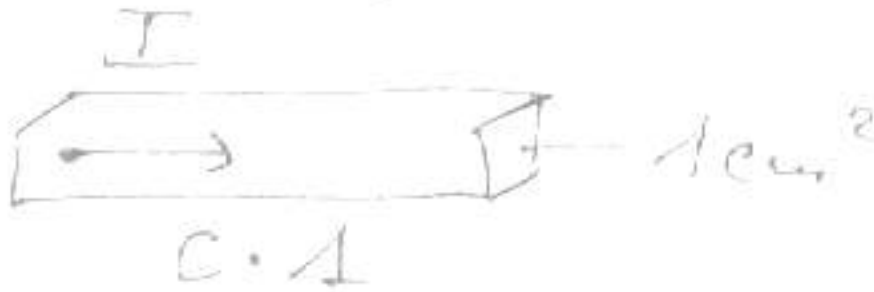
Intensywność promienia światła rozchodzącego się w jakimś kierunku mierzymy jego natężeniem I . Natężenie to jest zdefiniowane tak, by ilość energii dE przechodząca przez ukierunkowany element powierzchni $d\vec{S}$ z kąta bryłowego $d\omega$ przedziale częstości $d\nu$ w czasie dt wynosiła

$$dE = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) \vec{n} \cdot d\vec{S} d\omega d\nu dt \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

gdzie przez \vec{n} oznaczyliśmy jednostkowy wektor w kierunku promienia. Kosinus kąta pomiędzy promieniem a normalną do powierzchni oznaczmy μ :

$$\mu dS = \vec{n} \cdot d\vec{S} \quad (2.25)$$



Rysunek 2.1: Gęstość energii i natężenie promieniowania

2.3.2 Gęstość promieniowania

Natężenie promieniowania I_ν z jego gęstością energii u_ν wiąże się w następujący sposób $u_\nu = I_\nu/c$. Uzasadnienie opiera się na tym, że jeśli w 1cm^3 znajduje się ileś fotonów lecących prawie prostopadłe do jednej ze ścian, to średnio po czasie $1/c$ każdy z nich musi wylecieć (Rys. 2.1). W tym czasie z kąta bryłowego $d\omega$ wokół prostopadłej do ściany wleci $I_\nu/c d\omega$ energii wypełniając całą objętość co daje gęstość $I_\nu d\omega/c$. Trik polega, na zauważeniu, że ilość fotonów wpadających skośnie przez boczne ścianki na mocy symetrii jest dokładnie kompensowana przez fotony wylatujące z drugiej strony, zatem znaleziona gęstość jest ścisła. Odpowiednią funkcję rozkładu dla fotonów dostajemy dzieląc gęstość przez energię fotonu $f_\nu = I_\nu/h\nu c$. Dla całkowitej gęstości promieniowania izotropowego u_ν pozostaje uwzględnić wszystkie inne kierunki, co na mocy izotropii sprowadza się do pomnożenia przez pełny kąt bryłowy 4π , zatem

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (2.26)$$

2.3.3 Momenty natężenia promieniowania

Podobnie jak dla funkcji rozkładu cząstek tak i dla promieniowania warto znać odpowiednie momenty. Ponieważ przy zadanej energii $h\nu$ wartość pędu fotonu jest stała, w momentach wystarczy uwzględnić potęgę wektora jednostkowego \bar{n} . Mamy zatem dla gęstości energii, jej strumienia i tensora ciśnień promieniowania

$$\frac{1}{4\pi} \oint \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{n} \\ \bar{n} \bar{n} \end{pmatrix} I_\nu d\omega = \frac{1}{4\pi} \oint \begin{pmatrix} cE_\nu \\ \vec{F}_\nu \\ c\vec{P}_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_\nu \\ H_\nu \\ \vec{K}_\nu \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{energia} \\ \text{strumień} \\ \text{tens.ciśn.} \end{array} \quad (2.27)$$

W środkowej kolumnie wprowadziliśmy oznaczenia zgodne z przyjętymi w fizyce a w ostatniej używane w teorii atmosfer. W tym ostatnim przypadku J jest zwane średnim natężeniem, bo sumowanie i uśrednianie po kącie bryłowym różnią się jedynie czynnikiem 4π .

2.3.4 Momenty w atmosferze płasko-równoległej

W atmosferze płasko-równoległej element kąta bryłowego jest $2\pi d\mu$ a zależność I od kierunku sprowadza się do zależności od μ . Momenty natężenia przybierają prostą postać:

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \quad \text{średnie natężenie} \quad (2.28)$$

$$H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \quad \text{strumień} \quad (2.29)$$

$$K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu \quad \text{tens. ciśn.} \quad (2.30)$$

2.4 Proste rozkłady kątowe promieniowania

2.4.1 Promieniowanie izotropowe

Promieniowanie w RT jest przykładem promieniowania izotropowego. Załóżmy, że natężenie promieniowania izotropowego jest $I = const$ i policzymy jego momenty wprost z definicji (2.28) – (2.30).

$$J = I \quad U = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{g. energii} \quad (2.31)$$

$$H = 0 \quad F = 0 \quad \text{strumień} \quad (2.32)$$

$$K = \frac{I}{3} \quad P = \frac{4\pi}{3c} I \quad \text{ciś. prom.} \quad (2.33)$$

W tym przypadku stosunek $f_E = K/J$ zwany czynnikiem Eddingtona jest $1/3$

2.4.2 Izotropowo świecąca półprzestrzeń

Całkując tylko po $\mu > 0$ otrzymujemy

$$J^+ = \frac{I}{2} \quad (2.34)$$

$$H^+ = \frac{I}{4} \quad F^+ = 4\pi H^+ = \pi I \quad \text{strumień} \quad (2.35)$$

$$K^+ = \frac{I}{6} \quad (2.36)$$

I w tym przypadku stosunek $f_E = 1/3$.



Rysunek 2.2: Liczenie grzbietów fal wzdłuż wektora \bar{L}

2.4.3 Dwa promienie

Dwa przeciwbieżne nieskończenie wąskie promienie można przedstawić za pomocą funkcji δ Diraca: $I = I_0\delta(|\mu - \mu_0|)$. Ze względu na symetrię atmosfery płasko równoległej nie jest to jeden promień ale cała ich wiązka leżąca na powierzchni stożka. Wówczas momenty wynoszą

$$J^\delta = I_0 \quad (2.37)$$

$$H^\delta = 0 \quad (2.38)$$

$$K^\delta = \mu_0^2 I_0 \quad (2.39)$$

W tym przypadku stosunek $f_E = \mu_0 \leq 1$. Ze względu na anizotropię w atmosferze spowodowaną istnieniem gradientu temperatury, można się spodziewać nadmiaru promieniowania prostopadłego do powierzchni, ale nie równoległego. Widać, że nawet w skrajnych przypadkach czynnik Eddingtona zmienia się w stosunkowo niewielkim przedziale $1/3 \leq f \leq 1$. Dla $\mu_0 = 1/\sqrt{3}$ mamy $f_E = 1/3$ i w tym przypadku można się spodziewać dobrego przybliżenia transferu promieniowania prawie izotropowego za pomocą przybliżenia dwu promieni.

2.5 Promieniowanie w RT: Rozkład Plancka

2.5.1 Kwantowa natura promieniowania

W równowadze termodynamicznej promieniowanie ma widmo takie jak promieniowanie ciała doskonale czarnego. Wyliczenie prawidłowego kształtu tego widma nie jest możliwe bez odwołania się do fizyki kwantowej. To właśnie przy okazji badania tego widma Planck przyjął, że energia promieniowania jest podzielona na porcje czyli kwanty o energii $h\nu$ i został akuszerem mechaniki kwantowej. Te porcje dziś często nazywamy fotonami. Odpowiednie rachunki są szczególnie proste gdy założymy, że promieniowanie znajduje się w sześciennym pudle z luster o boku L . Wówczas w pudle trwale są tylko fale stojące a wszystkie inne ulegają zgaszeniu wskutek interferencji ze swoimi odbiciami przesuniętymi w fazie. To się nazywa w fizyce założenie periodycznych warunków brzegowych. Trik polega na wykazaniu, że wyniki słabo albo wcale zależą od L i odsunięciu ścian na nieskończoną odległość. Wówczas można powiedzieć, że warunki brzegowe nie mają wpływu na rozważany proces.

2.5.2 Gęstość stanów

Każdą z fal stojących w pudle to jeden ze stanów promieniowania. Stany różnią się między sobą kierunkiem rozchodzenia się fali i ilością grzbietów w pudle. Obie własności stanu można opisać za pomocą wektora falowego \vec{k} o kierunku rozchodzenia się fali i wartości

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c. \quad (2.40)$$

Ilość grzbietów \ stanów \vec{k} wzdłuż wektora \vec{L} to (Rys. 2.2):

$$\mathcal{N} = \frac{\vec{L} \cdot \vec{k}}{2\pi}. \quad (2.41)$$

Rozważając mały przedział wartości składowej n.p. Δk_x przez różniczkowanie znajdziemy, że odpowiada mu $\Delta \mathcal{N}_x = L_x \Delta k_x / 2\pi$ stanów różniących się składową k_x . Liczbę wszystkich możliwych stanów otrzymamy mnożąc przez siebie ilości różnych składowych w x , y i z . Zatem w elemencie objętości $d^3 k$ mamy $d\mathcal{N} = L_x L_y L_z d^3 k / (2\pi)^3$ stanów o różnej liczbie grzbietów. Pamiętając, że dla każdego z tych stanów mamy jeszcze 2 możliwe polaryzacje światła i przechodząc od kartezjańskiego do sferycznego elementu objętości w przestrzeni wektorów \vec{k} i korzystając z (2.40) mamy

$$d\mathcal{N} = 2V \frac{\nu^2 d\nu d\Omega}{c^3} \quad (2.42)$$

gdzie $d\Omega$ jest elementem kąta bryłowego.

2.5.3 Średnia energia stanu

Fotony są bozonami, co oznacza że w każdym stanie może się znajdować wiele fotonów. Stanowi w którym jest n fotonów odpowiada energia $E_n = nh\nu$. Obsadzenie tego stanu, zgodnie z rozkładem Boltzmanna jest $N_n \sim e^{-\beta E_n}$ gdzie tradycyjnie oznaczyliśmy $\beta = 1/kT$. Teraz możemy policzyć średnią energię stanu jako energię ważoną jego obsadzeniem:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \quad (2.43)$$

Ostatnia równość wynika z zauważenia, że $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h\nu}$ jest sumą szeregu geometrycznego. Wykonując różniczkowaniem otrzymujemy

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.44)$$

2.5.4 Rozkład Plancka

Ponieważ w równowadze wszędzie temperatura jest ta sama a promieniowanie zależy wyłącznie od temperatury, musi być ono izotropowe. Zatem całkowanie po kierunkach można wykonać w sposób trywialny zamieniając $d\Omega$ na 4π . Mnożąc teraz gęstość stanów na jednostkę V przez ich energię otrzymujemy ostatecznie rozkład Plancka gęstości energii promieniowania:

$$u_\nu d\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (2.45)$$

Natężenie izotropowego promieniowania B_ν z gęstością u_ν wiąże (2.31). Zatem rozkład Plancka natężenia promieniowania B i jego granice dla $T \rightarrow 0$ i $T \rightarrow \infty$ zwane rozkładami Wiena oraz Raleigha-Jeansa są

$$B_\nu d\nu = 2 \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (2.46)$$

$$\rightarrow 2 \frac{\nu^2}{c^2} h\nu e^{-h\nu/kT} d\nu \quad \text{dla } T \rightarrow 0 \text{ Wien} \quad (2.47)$$

$$\rightarrow 2 \frac{\nu^2}{c^2} kT d\nu \quad \text{dla } T \rightarrow \infty \text{ R-J} \quad (2.48)$$

2.5.5 Prawo Stefana-Boltzmann

W przypadku izotropowo świecącej płaszczyzny na powierzchni c.d.cz. strumień na mocy (2.35) jest πB_ν . Bolometryczny strumień z c.d.cz. to

$$F = \pi B = \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 \quad (2.49)$$

gdzie σ jest stałą Stefana-Boltzmana. Ostatnia równość wynika bezpośrednio z zamiany zmiennych pod całką na $x = h\nu/kT$. Po tej zamianie i wyłączeniu stałych całka nie zawiera parametrów zatem jej wartość też jest stałą. W tablicach całek można znaleźć jej wartość $\pi^4/15$, zatem $\sigma = \pi^4 k^4/15c^2 h^3$. Z wstawienia tak wyznaczonego natężenia bolometrycznego B do wzorów na momenty mamy

$$B = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad \text{natężenie promieniowania} \quad (2.50)$$

$$U = \frac{4}{c}\sigma T^4 \quad \text{gęstość energii} \quad (2.51)$$

$$P = \frac{4}{3c}\sigma T^4 \quad \text{ciśnienie promieniowania} \quad (2.52)$$

2.6 Oddziaływanie promieniowania z materią

2.6.1 Współczynniki emisji i absorpcji

Makroskopowo oddziaływanie promieniowania z materią sprowadza się do dwu procesów: pochłaniania (absorpcji) i wysyłania (emisji) światła (fotonów). Wydajność tych procesów charakteryzują odpowiednio współczynnik absorpcji χ i emisji η . Są one tak określone, że na drodze ds promieniowanie o natężeniu I traci wskutek absorpcji dE_A energii a zyskuje dE_E wskutek emisji, gdzie

$$dE_A = \chi(\bar{r}, \bar{n}, \nu, t) I(\dots) d\bar{s} \cdot d\bar{S} d\omega d\nu dt \quad (2.53)$$

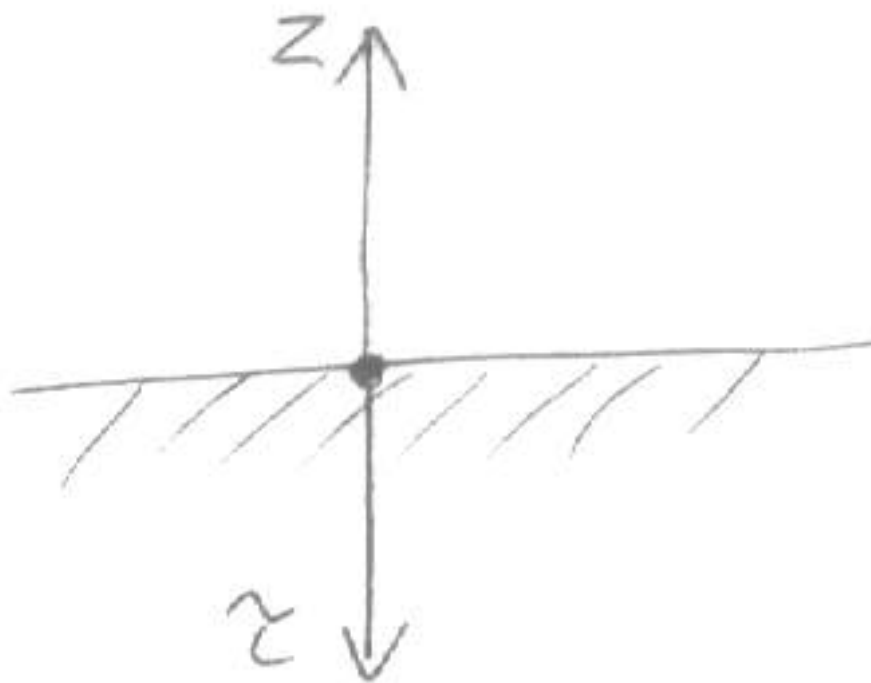
$$dE_E = \eta(\dots) d\bar{s} \cdot d\bar{S} d\omega d\nu dt \quad (2.54)$$

2.6.2 Grubość optyczna

Jako średnią drogę swobodną fotonu określimy drogę Λ na której przy nierealistycznym założeniu stałych strat energia absorbowana jest równa całej dopływającej energii $dE_A = dE$ skąd kładąc $ds = \Lambda$ mamy $\chi I \Lambda = I$ zatem

$$\Lambda = \frac{1}{\chi} \quad (2.55)$$

Bardziej poprawne rozumowanie różniczkowe opiera się na uwzględnieniu proporcjonalności strat do I i zauważeniu, że $dE \sim I$ a $dE_A \sim -\chi I ds$ i przyrównując $dI/I = -\chi ds \equiv -d\theta$ z rozwiązaniem $I = I_0 e^{-s/\chi} \equiv I_0 e^{-\theta}$. Wówczas Λ jest odległością na której natężenie pochłanianego promieniowania zmniejszy się o czynnik e . Przy okazji wprowadziliśmy pojęcie grubości optycznej θ jako miary drogi promienia w jednostkach średniej drogi swobodnej $\Lambda = 1/\chi$ (Rys. 2.3). Często jest wygodnie mierzyć inną grubość optyczną τ nie wzdłuż promienia ale wzdłuż pewnego wyróżzonego kierunku, n.p. normalnej do powierzchni atmosfery. Jeśli kosinus nachylenia promienia do normalnej jest μ to mamy $d\theta = d\tau/\mu$



Rysunek 2.3: Sposób liczenia głębokości optycznej

i dalej

$$\frac{dI}{I} = -\chi ds \equiv -d\theta \equiv -d\tau/\mu \quad \text{z rozwiązaniem} \quad (2.56)$$

$$I = I_0 e^{-s/\chi} \equiv I_0 e^{-\theta} \equiv I_0 e^{-\tau/\mu} \quad (2.57)$$

Tutaj potrzebne jest ostrzeżenie, że zdarza się oznaczanie zarówno θ jak i τ tym samym symbolem τ i tylko z kontekstu wynika o którą z wielkości chodzi.

2.6.3 Fizyczne mechanizmy emisji i absorpcji

Jeśli skutek oddziaływania liczba fotonów i ich własności nie ulegają zmianie a zmienia się jedynie kierunek rozchodzenia się mówimy o rozpraszaniu. W przeciwnym wypadku, gdy fotony są niszczone (pochłaniane) w procesie wzbudzenia elektronów w atomach mówimy o pochłanianiu (absorpcji) rzeczywistej. Współczynniki pochłaniania dla absorpcji rzeczywistej i rozpraszania oznaczmy κ i σ i ogólnie mamy

$$\chi = \kappa + \sigma \quad (2.58)$$

Mikroskopowo, na proces emisji składają się dwa procesy: emisja spontaniczna do której stosuje się prawo (2.54) i emisja wymuszona, opisywana wzorem (2.53) z ujemną wartością χ . Dla wygody notacji przyjęto zawsze uwzględniać we współczynniku absorpcji χ . wkład od emisji wymuszonej, toteż w dalszych rozważaniach wystarczy uwzględniać tylko dwa procesy określone współczynnikami χ i η .

2.6.4 Funkcja źródłowa

Stosunek współczynnika emisji do absorpcji nazywamy funkcją źródłową S :

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \quad (2.59)$$

Natężenie promieniowania w RT nazywamy rozkładem Plancka i oznaczmy B_ν . Później pokażemy że jest ono prosto związane z gęstością energii Plancka $B_\nu = (c/4\pi)u_\nu$. W RT proces emisji musi być w równowadze detalicznej z procesem absorpcji, zatem dla dowolnego kierunku mamy

$$\eta_\nu = \chi_\nu B_\nu \quad \text{r. detaliczna} \quad (2.60)$$

Ten szczególny przypadek równowagi detalicznej jest zwany prawem Kirchhoffa. Wydajność oddziaływania atomu z promieniowaniem zależy od stanu kwantowego atomu i od rodzaju fotonu. Jednak foton o energii $h\nu$ w równowadze termodynamicznej niczym się nie różni od fotonu o takiej samej energii bez RT. Zatem

o ile tylko materia jest w LRT to współczynniki jej oddziaływanie z fotonami o konkretnej energii nie zależą od tego czy promieniowanie jest czy nie jest w RT. Wniosek: w LRT funkcja źródlowa musi być taka sama jak w RT, zatem jest funkcją Plancka dla danej lokalnej temperatury T:

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = B_\nu(T) \quad \text{LRT} \quad (2.61)$$

Z podobnych powodów emisja w LRT i odpowiednia S muszą być izotropowe.

Rozdział 3

Równanie transferu i jego rozwiązania formalne

3.1 Równanie transferu

3.1.1 Przypadek ogólny

Rozpatrując promień biegnący wzdłuż kierunku \bar{n} mamy całkowitą zmianę jego energii na drodze Δs

$$\Delta E = \Delta E_E - \Delta E_A \quad (3.1)$$

Podstawiając wzory (2.23), (2.53) i (2.54) otrzymujemy

$$\Delta I dS d\omega d\nu dt = (\eta - \chi I) \Delta s dS d\omega d\nu dt \quad (3.2)$$

Podstawiając

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial I}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial I}{\partial s} \Delta s + \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} \Delta s \quad (3.3)$$

oraz $\partial I / \partial s = \bar{n} \cdot \nabla I$ otrzymujemy 3-wymiarowe równanie transferu

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + (\bar{n} \cdot \nabla) I \right) = \eta - \chi I \quad (3.4)$$

3.1.2 Statyczne atmosfery 1-wymiarowe

Dla atmosfery statycznej $\partial / \partial t = 0$. Dla płaskiej atmosfery $\partial I / \partial s = (\bar{n} \cdot \nabla) I = \mu (dI/dz)$ i równanie transferu redukuje się do

$$\mu \frac{dI}{dz} = \eta - \chi I \quad (3.5)$$

Dzieląc stronami przez $-\chi$ i wprowadzając grubość optyczną $d\tau/\mu = d\theta = -\chi ds = -\chi dz/\mu$ otrzymujemy

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (3.6)$$

gdzie za pomocą indeksów podkreśliliśmy zależność wielkości od częstości światła ν . Ta ostatnia postać r. transferu jest używana najczęściej. W tej postaci po prawej stronie pierwszy człon odpowiada za absorpcję a drugi za emisję. Ich wkłady dI_A i dI_E do całkowitej zmiany natężenia dI są odpowiednio

$$dI_A = -Id\tau/\mu = -Id\theta \quad (3.7)$$

$$dI_E = +Sd\tau/\mu = +Id\theta \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Całkując po pełnym kącie bryłowym 4π otrzymamy odpowiednie zmiany średniego natężenia

$$dJ_A = -Jd\tau/\mu = -Jd\theta \quad (3.10)$$

$$dJ_E = +Sd\tau/\mu = +Sd\theta \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

przy czym milcząco założyliśmy, że S jest izotropowe, jak to ma miejsce w LRT.

Trochę bardziej skomplikowane rozważania pozwalają na znalezienie r. transferu dla sferycznie symetrycznej atmosfery:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial s} &= \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} \quad \text{skąd} \\ \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} &= \eta - \chi I \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2 Momenty równania transferu

3.2.1 Przypadek ogólny

Analogicznie do ogólnego przypadku kinetyki cząstek z równania transferu w postaci 3-wymiarowej (3.4) jako zerowy i pierwszy momenty otrzymujemy równanie ciągłości i zachowania pędu dla fotonów:

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{F}_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu c E_\nu \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot \bar{P}_\nu = -\chi_\nu \bar{F}_\nu \quad (3.15)$$

3.2.2 Atmosfera płasko-równoległa

Momenty r. transferu $\mu dI_\nu/d\tau = I_\nu - S_\nu$ w atmosferze płasko równoległej przybierają postać

$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu \quad (3.16)$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \quad (3.17)$$

W tej postaci przy znanym S jest to układ równań różniczkowych nie domknięty, bo mamy 2 równania a 3 niewiadome funkcje J , H i K .

3.2.3 Metoda czynników Eddingtona

Jako czynnik Eddingtona oznaczmy

$$f_{E\nu} = \frac{K_\nu}{J_\nu} \quad (3.18)$$

W przypadku izotropowym $I = const$ ten czynnik ma wartość $1/3$, co wynika wprost z (2.31) i (2.33). W ogólnym przypadku jego wartość będzie inna i zależna od położenia w atmosferze. Można oczekiwać, że głęboko w atmosferze skąd fotony uciekają z trudem i gdzie powstają warunki zbliżone do RT $f_{E\nu} \rightarrow 1/3$. Podstawiając do równania (3.17) $K_\nu = f_{E\nu}^k J_\nu$, różniczkując i podstawiając do (3.16) otrzymujemy inną postać równania transferu

$$\frac{d^2 f_{E\nu}^k J_\nu}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.19)$$

Jest ono o tyle wygodna, że występujące w nim J_ν nie zależą od kątów.

Metoda czynników Eddingtona przypomina metodę Feautriera o tyle, że rozwiązuje się w niej równanie różniczkowe 2-rzędu. Mianowicie, zakładając, że w k -tym przybliżeniu $f_{E\nu}^k$ jest znane rozwiązujemy (3.19) metodą opisaną w paragrafie 6.2.3. Obliczenia można rozpocząć kładąc $f_{E\nu}^0 = 1/3$, jak w przybliżeniu Eddingtona. Otrzymujemy k -te przybliżenie J^k w całej atmosferze. Podstawiając takie J^k do ogólnego wyrażenia na S i stosując rozwiązanie formalne, o których mowa dalej otrzymamy I^k . Stąd obliczając całki (2.28) i (2.30) otrzymamy nowe przybliżenie czynników Eddingtona $f_{E\nu}^{k+1}$ i całą operację można powtórzyć. Okazuje się, że taka procedura jest zbieżna i stanowi jedną ze skutecznych metod numerycznych rozwiązywania równania transferu.

3.3 Formalne rozwiązania r. transferu

Ze względu na wzajemne sprzężenie promieniowania i materii w atmosferze, nie sposób jest określić zależnej od tej ostatniej funkcji źródłowej S bez znajomości I . By takie pełne rozwiązanie było możliwe trzeba będzie skorzystać z dodatkowego warunku t.zw. równowagi promienistej. Toteż podając tutaj rozwiązania równania transferu w których S jest z góry założoną funkcją mają jedynie sens formalnycównania różniczkowego bez konkretnego odniesienia fizycznego zagadnienia transferu promieniowania w atmosferze. Rozważymy szereg rozwiązań formalnych dla różnych postaci S . Dla wygody notacji pomijamy indeks ν .

3.3.1 Ośrodek bez emisji i absorpcji

Kładąc w równaniu (3.5) $\chi = \eta = 0$ dostajemy

$$\mu \frac{dI}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = const \quad (3.20)$$

3.3.2 Ośrodek bez absorpcji

Dla optycznie cienkiego obłoku gazowego emitującego ale praktycznie nie pochłaniającego, $\chi = 0$ stąd

$$\mu \frac{dI}{dz} = \eta \quad \Rightarrow \quad I(z, \mu) = I_0 + \int_{z_0}^z \eta \frac{dz}{\mu} \quad (3.21)$$

Jest to przypadek realistyczny, ściśle spotykany w tych mgławicach gazowych które emitując linie wzbronione nie mogą ich pochłaniać, wskutek t.zw. reguły zakazu dla pewnych przejść kwantowych.

3.3.3 Ośrodek bez emisji

Dla oświetlonego od tyłu ciemnego obłoku lub chłodnej warstwy nad gorącą atmosferą mamy w przybliżeniu $S = 0$, zatem przypadek już rozpatrywany w paragrafie 2.6.2. Wstawiając do wzoru (3.6) $S = 0$, całkując i nakładając na wejściu warunek początkowy $I(\tau) = I_\tau$ otrzymujemy na wyjściu

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -I, \quad I(\tau) = I_\tau \quad \Rightarrow \quad I(0) = I_\tau e^{-\tau/\mu} \quad (3.22)$$

3.3.4 Ogólne rozwiązanie formalne

Zapisując równanie transferu w postaci $I - \mu dI/d\tau = S$ i mnożąc stronami przez t.zw. czynnik całkujący $e^{-\tau/\mu}$ możemy je scałkować stronami w granicach $\tau_1 < \tau_2$ bowiem $\mu(d/d\tau)(e^{-\tau/\mu}I) = -e^{-\tau/\mu}I + e^{-\tau/\mu}\mu(dI/d\tau)$. Dzieląc wynik przez $e^{-\tau_1/\mu}$ otrzymujemy:

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu)e^{-\frac{\tau_2-\tau_1}{\mu}} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\mu}} S(\tau) \frac{d\tau}{\mu} \quad (3.23)$$

3.3.5 Atmosfera pół-nieskończona

Kładąc dla $\mu > 0$ we wzorze (3.23) $\tau_1 = \tau$ oraz $\tau_2 \rightarrow \infty$ otrzymujemy rozwiązanie formalne dla płasko-równoległej atmosfery pół-nieskończonej:

$$I(\tau, \mu > 0) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} S(t) \frac{dt}{\mu} \quad (3.24)$$

W szczególności dla $\tau = 0$ otrzymujemy natężenie promieniowania opuszczającego atmosferę. Podobnie dla promieniowania idącego do wnętrza atmosfery, $\mu < 0$, kładąc $\tau_1 = 0$ i $\tau_2 = \tau$ przy braku oświetlenia zewnętrznego $I(0, \mu < 0) = 0$ otrzymujemy

$$I(\tau, \mu < 0) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-|\frac{t-\tau}{\mu}|} S(t) \frac{dt}{|\mu|} \quad (3.25)$$

3.3.6 Rozwiązanie Barbier-Eddingtona

Ważnym przybliżeniem funkcji źródłowej jest funkcja liniowa

$$S(\tau) = a + b\tau \quad (3.26)$$

W większości atmosfer jest ona dość dobrym przybliżeniem już dla $\tau > 1$. Wstawiając do (3.24) i całkując przez części dostajemy rezultat zwany rozwiązaniem Barbier-Eddingtona:

$$I(0, \mu > 0) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\mu}} (a + b\tau) \frac{d\tau}{\mu} = a + b\mu = S(\tau = \mu) \quad (3.27)$$

Jest to ważny wynik, sugerujący dla ogólnych ale dosyć gładkich funkcji $S(\tau)$ przybliżenie natężenia promienowania na powierzchni przez $S(\tau = \mu)$.

3.3.7 Warstwa jednorodna

Gdy wstawimy do (3.23) $S = const$, $\tau_1 = 0$ i $\tau_2 = T$ otrzymamy

$$I(0, \mu) = e^{-\frac{T}{\mu}} I(T, \mu) + (1 - e^{-\frac{T}{\mu}}) S \quad (3.28)$$

Jest to rozwiązanie transferu promieniowania przez warstwę jednorodną gazu. Pierwszy człon uwzględnia pochłanianie zewnętrznego promieniowanie a drugi emisję wewnątrz obłoku. W szczególności dla $I(T, \mu) = 0$ i $\mu = 1$ mamy

$$I(0, 1) = (1 - e^{-T}) S \quad (3.29)$$

$$\rightarrow S \quad \text{dla } T \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

$$\rightarrow ST \quad \text{dla } T \rightarrow 0 \quad (3.31)$$

Przypadki asymptotyczne odnoszą się odpowiednio do obłoku pół-nieskończonego i do cienkiego obłoku.

3.4 Przybliżenie dyfuzyjne

3.4.1 Rozwinięcie natężenia w szereg Taylora

Dla dużych głębokości $\tau \rightarrow \infty$ fotony mają minimalną szansę ucieczki, zatem warunki zbliżają się do RT. Wówczas $S_\nu \rightarrow B_\nu$ co wynika ze szczególnego przypadku zasady równowagi detalicznej, zwanego prawem Kirchhoffa: $\kappa_\nu B_\nu = \eta_\nu$. Dla wygody notacji w tym paragrafie opuścimy indeksy ν pamiętając jednak, że aż do odwołania wszystkie wielkości występujące we wzorach z wyjątkiem μ są zależne od ν . Jeśli tak to rozkładając w szereg Taylora w tym przybliżeniu mamy

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B}{d\tau^n} \frac{(t - \tau)^n}{n!} \quad (3.32)$$

Z rozwiązania formalnego po zamianie zmiennych $y = (t - \tau)/\mu$ mamy

$$\int_0^\infty (t - \tau)^n e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} = \mu^n \int_0^\infty y^n e^{-y} dy = \mu^n n! \quad (3.33)$$

$$I(t, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B}{d\tau^n} = B + \mu \frac{dB}{d\tau} + \mu^2 \frac{d^2 B}{d\tau^2} + \dots \quad (3.34)$$

3.4.2 Momenty

Głęboko w gwiazdzie zmiany temperatury przebiegają powoli i w sposób gładki, zatem pochodne można oszacować ilorazami różnicowymi $d^n B/d\tau^n \sim B/\tau^n$.

Ponieważ n.p. w Słońcu $\kappa \sim 1$ lub więcej to jego grubość optyczna $\tau > 10^{10}$, zatem we wnętrzu powyższy szereg Taylora jest szybko zbieżny i z dużą dokładnością można go uciąć po dwu wyrazach. Obliczając kolejne momenty rozkładu dostajemy

$$J(\tau) = B + \frac{1}{3} \frac{d^2 B}{d\tau^2} + \dots \rightarrow B \quad (3.35)$$

$$H(\tau) = \frac{1}{3} \frac{dB}{d\tau} + \dots \quad (3.36)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{3} B + \frac{1}{5} \frac{d^2 B}{d\tau^2} + \dots \rightarrow \frac{1}{3} B \quad (3.37)$$

gdzie granice dotyczą $\tau \rightarrow \infty$.

3.4.3 Równanie promienistego transportu ciepła

Teraz powracamy do indeksów ν . Wielkości bez indeksu oznaczają wartości wyciągnięte po ν . W granicy dużego τ mamy $H_\nu = (1/3)dB_\nu/d\tau_\nu = -(1/3\chi_\nu)(dB_\nu/dz)$ i dalej korzystając ze znanej analitycznej zależności $B_\nu(T)$ otrzymujemy

$$H_\nu = -\frac{1}{3\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dz} \quad (3.38)$$

Przybliżenie na którym opiera się to równanie nazywamy je przybliżeniem dyfuzyjnym transportu energii. Stosuje się ono w przypadku małej anizotropii promieniowania, głęboko w atmosferze i we wnętrzach gwiazd. Równanie (3.38) ma postać podobną do równania przewodnictwa bowiem przewiduje proporcjonalność strumienia energii i gradientu temperatury. Współczynnik proporcjonalności $D = (1/3\chi_\nu)(dB_\nu/dT)$ nazwiemy współczynnikiem przewodnictwa promienistego.

3.4.4 Transport energii i średnia Rosselanda

Całkując (3.38) po ν dostajemy podobną postać dla strumienia bolometrycznego

$$H = -\frac{1}{3\chi_R} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} \quad \text{oznaczając} \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{\chi_R} \frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad (3.40)$$

gdzie ostatni wzór definiuje nową wartość średnią nieprzezroczystości χ_R , zwaną średnią Rosselanda. Okazuje się, że jeśli za wczasu policzyć tablice χ_R , to w warunkach stosowalności przybliżenia dyfuzyjnego transport energii sprowadza się do zwykłego, skalarne równania przewodnictwa, bez zależności od μ i ν !

Godzi się tutaj omówić bliżej własności średniej Rosselanda. Widać, że do średniej z największą wagą wchodzi te przedziały częstości, gdzie nieprzezroczystość jest mała a strumień Plancka duży. Można to wyjaśnić na przykładzie pomiaru przepływu wody w potoku. Dla średniego przepływu obszary koryta zarośnięte sitowiem lub wręcz zatamowane przeszkodami nie są istotne. Liczą się warunki tam, gdzie potok płynie wartko, gdzie brak przeszkód. Bardziej bezpośrednia analogia dotyczy oporu wupadkowego oporników łączonych równolegle. Podobnie w widmie różne przedziały ν stanowią równoległe kanały transportu energii.

3.5 Operatory i całkowa postać r. transferu

3.5.1 Całkowa funkcja wykładnicza

Całkową funkcję wykładniczą $E_n(x)$ nazywamy całkę

$$E_n(x) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-xt} dt = x^{n-1} \int_x^\infty t^{-n} e^{-t} dt \quad (3.41)$$

Dla dużych x w pierwszej postaci tylko funkcja wykładnicza ulega szybkim zmianom z t , zatem mamy przybliżenie $E_n(x) \rightarrow \int_1^\infty e^{-xt} dt$. Zamieniając zmienną całkowania na $y = xt$ znajdujemy $E_n(x) \rightarrow e^{-x}/x$. Natomiast z drugiej postaci wstawiając zamiast t^{-n} wartość maksymalną x^{-n} znajdujemy oszacowanie $E_n(x) \leq e^{-x}/x$. Pozostałe własności E_n wynikają z prostego różniczkowania po parametrze lub całkowania przez części jednej z postaci całki:

$$E_n(x) \rightarrow = \frac{e^{-x}}{x} \quad \text{dla } x \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

$$E_n(x) \leq = \frac{e^{-x}}{x} \quad (3.43)$$

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1} \quad (3.44)$$

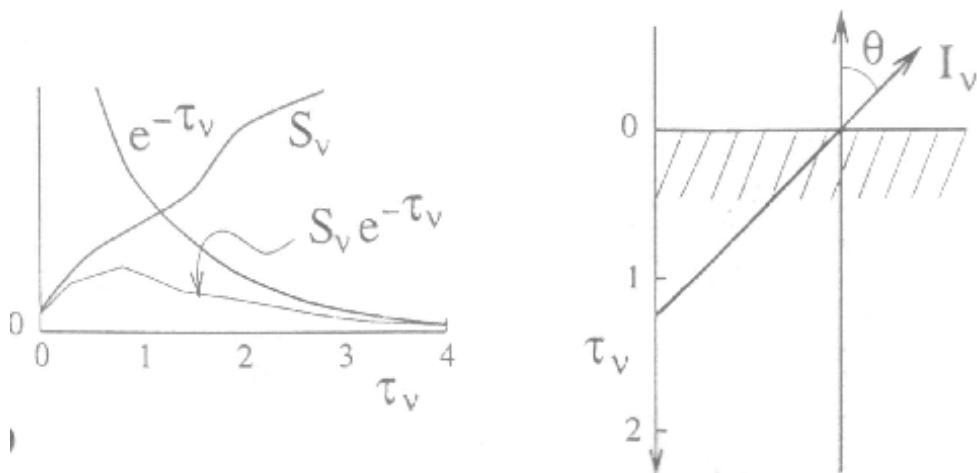
$$E'_n(x) = -E_{n-1}(x) \quad (3.45)$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} [e^{-x} - xE_{n-1}(x)] \quad (3.46)$$

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad (3.47)$$

3.5.2 Operatory momentów

W tym paragrafie rozważamy tylko promieniowanie w jednej częstości i opuścimy indeksy ν . Dla atmosfery pół nieskończonej rozwiązanie formalne r. transferu



Rysunek 3.1: Geometria (po prawej) i pochłanianie (po lewej) promieniowania generowanego przez źródła rozmieszczone w atmosferze

przybiera postać

$$I(\tau, \mu) = \begin{cases} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{-|\frac{t-\tau}{\mu}|} \frac{dt}{|\mu|} & \mu > 0 \\ \int_0^{\tau} S(t) e^{-|\frac{t-\tau}{\mu}|} \frac{dt}{|\mu|} & \mu < 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Przy tym wynik zależy od całej funkcji $S(\cdot)$ a nie tylko od jej jednej wartości $S(\tau)$ (Rys. 3.1). Taką relację funkcji argumentu S i funkcji wyniku I nazywamy operatorem. Gdy wynik zależy liniowo od argumentu to operator jest operatorem liniowym. Całkowanie i różniczkowanie są szczególnymi przypadkami operatorów liniowych. W operatorach całkowych funkcje pod całką przyjęto dzielić na argument operatora, w tym przypadku S i pozostałość zwaną jądrem operatora lub jądrem całkowym. W naszym przypadku jądro to $e^{-|(t-\tau)/\mu|}/\mu$. Zwykła zależność algebraiczna dwu funkcji jest przykładem trywialnej postaci operatora.

Całkując po kątach rozwiązanie formalne otrzymujemy $J(\tau)$ jako operator liniowy działający na $S(\tau)$. Operator ten nazywamy operatorem Λ . Podstawiając (3.48) do definicji J i zamieniając w drugiej całce μ na $-\mu$ mamy

$$\begin{aligned} \Lambda[S] &\equiv J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu = \frac{1}{2} \left[\int_{\tau}^{\infty} dt \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} + \int_0^{\tau} dt \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \right] S(t) e^{-|\frac{t-\tau}{\mu}|} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt S(t) \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \end{aligned}$$

Całką po μ daje się wyrazić przez $E_1(|t - \tau|)$. Podobnie dla H i K definiujemy całkowe operatory liniowe Φ i X . Po podobnych przekształceniach dla wszystkich 3 operatorów otrzymujemy

$$\Lambda[S] \equiv J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu = \frac{1}{2} \int_0^\infty S(t) E_1(|t - \tau|) dt \quad (3.49)$$

$$\Phi[S] \equiv H(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I \mu d\mu = \frac{1}{2} \left[\int_\tau^\infty - \int_0^\tau \right] S(t) E_2(|t - \tau|) dt \quad (3.50)$$

$$X[S] \equiv K(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I \mu^2 d\mu = \frac{1}{2} \int_0^\infty S(t) E_3(|t - \tau|) dt \quad (3.51)$$

Jądra tych operatorów wyrażają się przez funkcje $E_n(|\cdot|)$. Jądro Λ jest przedstawione na Rys. 3.2 wraz z jądrem $E_0(|\cdot|)$ operatora natężenia promieniowania z wzoru (3.48) dla różnych kątów. Fizyczna interpretacja szerokości jądra, n.p. jego szerokości w połowie wysokości to zasięg źródeł promieniowania które określają daną wielkość. Widzimy zatem, że średnie natężenie J jest określone przez stosunkowo blisko położone źródła. Największy przedział τ zajmują źródła określające $I(\tau, \mu = 0)$. Można to zrozumieć, gdyż przy zadanej nieprzezroczystości do najdalszych warstw sięga promieniowanie idące prostopadle. Źródła natężenia dla $\mu < 0.4$ są jeszcze bardziej zlokalizowane niż te dla J .

3.5.3 Reprezentacja dyskretnych warstw

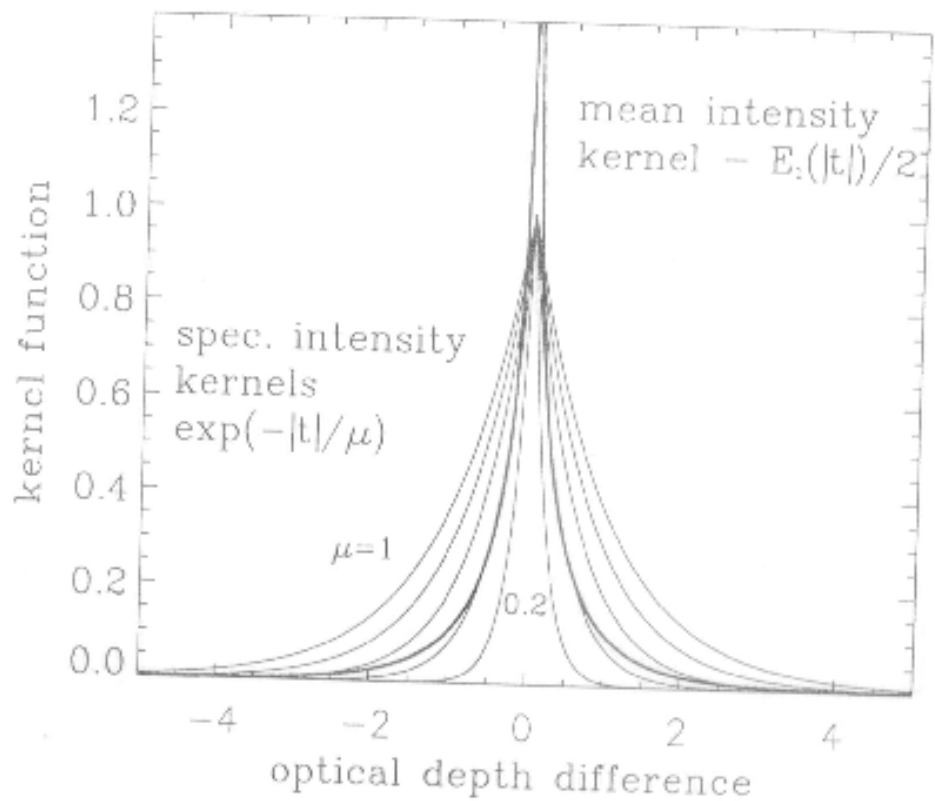
Dla praktycznych zastosowań operatorów liniowych decydujące znaczenie ma fakt, że ich działanie na funkcjach określonych na dyskretnym zbiorze argumentów można wyrazić przez mnożenie przez pewną macierz. Takie przybliżenie w pełni nadaje się do obliczeń. Fizycznie oznacza to, że ciągłą atmosferę rozbijamy na pewną ilość cienkich warstw jednorodnych. Jeśli składowymi wektora \bar{S} są wartości funkcji S w kolejnych warstwach a wektora \bar{J} średnie wartości natężenia w tych warstwach, to operator Λ można przedstawić za pomocą macierzy $\bar{\Lambda}$, takiej, że

$$\bar{J} = \bar{\Lambda} \bar{S} \quad (3.52)$$

Porównując ze wzorem (3.49) przekonujemy się, że elementy macierzy $\bar{\Lambda}$ są wartościami jądra E_1 dla różnych argumentów. Działając macierzą $\bar{\Lambda}$ na zerojedynkowy wektor bazy kartezjańskiej e_i otrzymujemy i -tą kolumnę macierzy:

$$\bar{\Lambda}_i = \bar{\Lambda} e_i \quad (3.53)$$

To równanie można zinterpretować w ten sposób, że kolumna $\bar{\Lambda}_i$ podaje rozkład J w atmosferze w której źródło promieniowania znajduje się jedynie w warstwie i -tej.



Rysunek 3.2: Jądra całkowe dla operatora natężenia promieniowania oraz natężenia uśrednionego (wz. 3.48 i 3.49)

Rozdział 4

Proste modele atmosfer

4.1 Atmosfera szara

4.1.1 Momenty r. transferu

Atmosfera szara to atmosfera w której pochłanianie nie zależy od ν , i od położenia czyli

$$\chi_\nu = \chi = \text{const} \quad (4.1)$$

W rzeczywistych atmosferach nigdy nie jest to spełnione, ale w gorących gwiazdach, gdzie dominuje rozpraszanie Thomsonowskie na elektronach i w Słońcu gdzie duży wkład daje H^- zależność nieprzezroczystości ciągłej w dużej części widma jest dosyć gładka.

Wygodnie będzie rozważać całkowity transport energii, wycalkowany po ν . Wielkości bez indeksu ν będą tutaj oznaczać wielkości całkowite, wycalkowane. Z zerowego i pierwszego momentu równania transferu wycalkowanego po ν (3.16) i (3.16) mamy

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S \quad (4.2)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H \quad (4.3)$$

4.1.2 Równowaga promienista

Ponieważ atmosfera jest statyczna, nie ma źródeł energii to całkowity jej strumień wszędzie musi być ten sam, czyli $H = \text{const}$ skąd $J = S$. Jest to warunek równowagi promienistej, odmiana prawa zachowania energii. W LRT $S = B$ i z (2.49) mamy

$$S(\tau) = J(\tau) = B(\tau) = \frac{\sigma T^4(\tau)}{\pi} \quad (4.4)$$

4.1.3 Funkcja Hopfa

Stały strumień można przyrównać do strumienia z c.d.cz. o pewnej temperaturze T_e :

$$4\pi H = F = \sigma T_e^4 = \text{const} \quad (4.5)$$

Jest to definicja T_e zwanej temperaturą efektywną. Jest ona stałym parametrem atmosfery, tak jak F . Temperatura efektywna nie jest temperaturą powierzchni. Ta ostatnia to $T(0)$. Jeśli $H = F/4\pi = \text{const}$ to możemy scałkować równanie dla drugiego momentu

$$K = \frac{F}{4\pi}(\tau + C) \quad (4.6)$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Jak wiemy, głęboko, w granicy $\tau \rightarrow \infty$ fotony mają małe szanse ucieczki i atmosfera zbliża się do RT, zatem $J \rightarrow K/3$ czyli do wartości dla promieniowania izotropowego. Zatem można napisać

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{3F}{4\pi}(\tau + q(\tau)) \quad \text{gdzie} & (4.7) \\ q(\tau) &\rightarrow C \quad \text{dla} \quad \tau \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Funkcja q nazywa się funkcją Hopfa. Można podać równanie całkowe którego jest ona rozwiązaniem. Wyrażając J za pomocą operatora Λ (3.49) otrzymujemy:

$$J(\tau) = \Lambda[S] = \Lambda[J] = \frac{1}{2} \int_0^\infty J(t) E_1(|t - \tau|) dt \quad (4.8)$$

Podstawiając (4.7) i upraszczając stałe mamy

$$\tau + q(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (t + q(t)) E_1(|t - \tau|) dt \quad (4.9)$$

Dalej przedstawimy bardziej praktyczne sposoby znajdowania funkcji Hopfa. Tutaj ograniczymy się do podania podstawowej jej własności: jest to funkcja monotoniczna, zmieniająca się w przedziale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 &< q(\tau) < 0.710 \\ 0 &< \tau < \infty \end{aligned}$$

Dla znanej funkcji Hopfa mamy też $J = S = B$ i zależność $T(\tau)$. Natężenie I można znaleźć z rozwiązania formalnego (3.24) i (3.25), a stąd wszystkie inne potrzebne wielkości.

4.2 Rozwiązania dla atmosfery szarej

4.2.1 Przybliżenie Eddingtona

Przybliżenie Eddingtona opiera się na założeniu, że w atmosferze szarej jest między parzystymi momentami K i J jest spełniony taki związek jak w przypadku izotropowym:

$$K = \frac{1}{3}J \quad (4.10)$$

Z porównania rozwiązań dla momentów r . transferu (4.6) i (4.6) wynika, że w tym przybliżeniu $q = C = const$ zatem zarówno funkcja źródłowa jak i średnie natężenie są liniowymi funkcjami τ :

$$S = J = \frac{3F}{4\pi}(\tau + C). \quad (4.11)$$

Zatem stosuje się tu rozwiązanie Barbier-Eddingtona i otrzymujemy gotowy wzór na rozkład kątowy natężenia promieniowania na powierzchni:

$$I(0, \mu) = S(\mu) = \frac{3F}{4\pi}(\mu + C). \quad (4.12)$$

W oparciu o znane natężenie można wyznaczyć strumień F i w ten sposób ustalić dotąd nieznaną wartość stałej całkowania C :

$$F = 4\pi H = \frac{4\pi}{2} \int_0^1 \frac{3F}{4\pi} (\mu + C) \mu d\mu = \frac{3F}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{C}{2} \right) \quad (4.13)$$

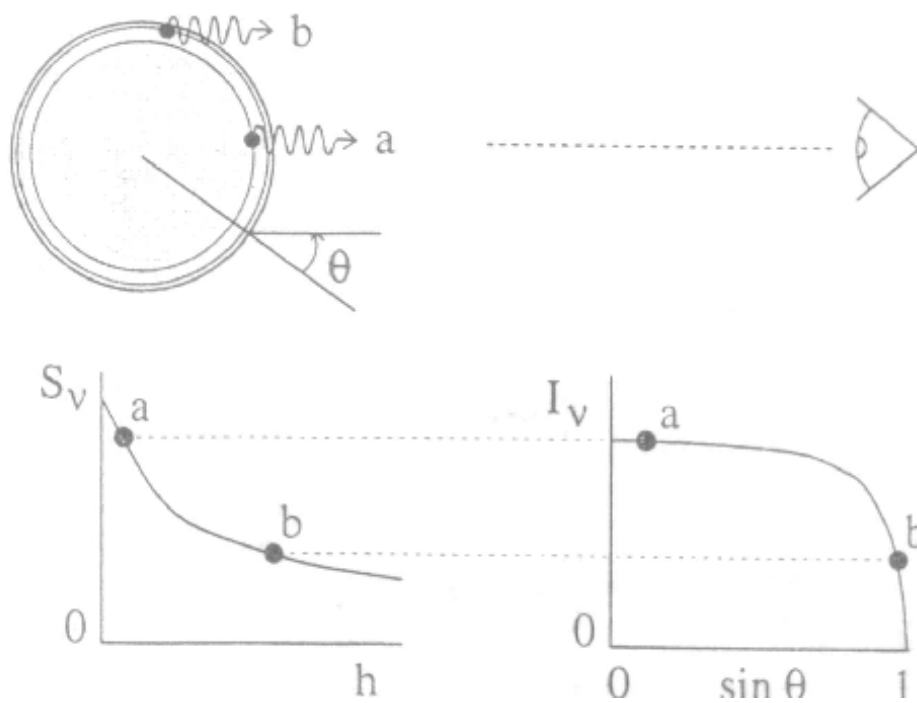
Z przyrównania obu stron mamy $C = 2/3 \approx q(\tau)$. Wstawiając tę wartość do powyższych wzorów na S oraz $I(0, \mu)$ otrzymujemy wyniki przybliżenia Eddingtona w postaci analitycznej:

$$B(\tau) = S(\tau) = J(\tau) = \frac{3\sigma T_e^4}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (4.14)$$

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mu \quad (4.15)$$

$$T^4 = \frac{3}{4}T_e^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (4.16)$$

Ostatnie z równań otrzymaliśmy z równania 4.14 po podstawieniu $B = \sigma T^4/\pi$ i z definicji temperatury efektywnej $F = \sigma T_e^4$, odpowiadającej związkowi F i T_e dla c.d.cz. Równanie (4.15) opisuje zjawisko pociemnienia brzegowego. Jest ono poglądowo zilustrowane na Rys. 4.1 a spowodowane jest przy patrzeniu pod dużym kątem widocznością tylko płytszych i chłodniejszych warstw, gdzie f.źródłowa ma mniejszą wartość. cor



Rysunek 4.1: Geometria ucieczki fotonów z powierzchni (u góry) i jej związek z pociemnieniem brzegowym

4.2.2 Rozwiązanie Chandrasekhara

Rozwiązanie Chandrasekhara opiera się na przedstawieniu całki po kątach w postaci dyskretnej jako sumy dla $2n$ kątów. Jak wiadomo w granicy $n \rightarrow \infty$ takie przedstawienie całek jest ściśle zatem rozwiązanie Chandrasekhara może posłużyć do znalezienia dokładnego rozwiązania dla atmosfery szarej. Podstawiając warunek równowagi promienistej $S = J$ bezpośrednio do równania transferu mamy

$$\mu_i \frac{\partial I_i}{\partial \tau} = I_i - \sum_{j=-n}^n a_j I_j \quad (4.17)$$

Przy tym zamiast całki $J = S$ podstawiliśmy odpowiednią sumę w której wagi a_j oraz kosinusy kątów μ_j są tak dobrane by wyniki dla całek funkcji stałej i liniowej były ściśle:

$$\frac{1}{2} \sum a_j 1 = 1 \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2} \sum a_j \mu_j = 0 \quad (4.19)$$

W rzeczywistości $4n$ stałych a_j oraz μ_j można wybrać tak by wyniki były ściśle dla całek wszystkich wielomianów μ aż do stopnia $4n - 1$. Takie przedstawienie całek sumami nazywa się kwadraturami Gaussa i jest omawiane w podręcznikach metod numerycznych n.p. Ralston(1965), Pres i in. (1992). Z symetrii naszej całki wynika, że $a_{-j} = a_j$ oraz $\mu_{-j} = -\mu_j$.

Równanie 4.17 posiada rozwiązanie szczególne postaci

$$I_i = Q + \mu_i + \tau \quad (4.20)$$

gdzie Q jest stałą. Sprawdzamy przez podstawienie do (4.17). Pamiętając o (4.18) i (4.19) otrzymujemy dla obu stron $\mu_i = Q + \mu_i + \tau - Q - \tau$, czyli równanie jest spełnione i jest to istotnie jego rozwiązanie. Równanie 4.17 można zapisać wektorowo w znajomej postaci równania różniczkowe pierwszego stopnia i o równie znajomym eksponencjalnym rozwiązaniu ogólnym:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \tau} = \bar{M} \bar{I} \text{ z rozwiązaniem} \quad (4.21)$$

$$\bar{I} = \bar{L} e^{k\tau} \quad (4.22)$$

Podstawiając do równania jego rozwiązanie ogólne dostajemy warunek na k :

$$k\bar{L} = \bar{M}\bar{L} \quad (4.23)$$

Jest to tak zwane zagadnienie własne. W odróżnieniu od przypadku skalarnego, w przypadku wektorowym mamy $2n$ rozwiązań dla k i ostateczne rozwiązanie

ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań dla różnych k . Liczby k nazywamy wartościami własnymi a odpowiadające im wektory \bar{L} wektorami własnymi. Samo równanie transferu ma symetrię góra dół, wyrażającą się na niezależności od znaku τ , zatem i wartości własne k muszą występować parami różniąc się tylko znakiem. Skuteczne metody szukania wartości i wektorów własnych dla danej macierzy M opisano we wspomnianych podręcznikach Ralstona (1971) i Press i in. (1992).

Asymetrię w zagadnieniu transferu wprowadzają warunki brzegowe. Jako wewnętrzny warunek brzegowy przyjmujemy dążenie rozwiązania do liniowego rozwiązania Eddingtona. Wiadomo bowiem, że w głębi pole promieniowania jest prawie izotropowe, co dokładnie odpowiada założeniom Eddingtona. Mamy zatem dla $k > 0$ $\bar{L} = 0$ i rozwiązanie można zapisać jako:

$$I_i = b(Q + \mu_i + \tau + \sum_{j=1}^n C_j L_{ij} e^{-k_j \tau}) \quad \text{gdzie } k_j > 0 \quad (4.24)$$

natomiast b można wyznaczyć z warunku na strumień a Q i C_j są stałymi całkowania. Rozpatrując dokładniej symetrię zagadnienia własnego można znaleźć analityczną postać wektorów własnych. Opuszczając rachunki podamy wynik

$$I_i = \frac{3F}{4} [Q + \mu_i + \tau + \sum_{j=1}^n L_j (1 + k_j \mu_i)^{-1} e^{-k_j \tau}] \quad \text{gdzie } k_j > 0 \quad (4.25)$$

Do wyznaczenia z zewnętrznego warunku brzegowego

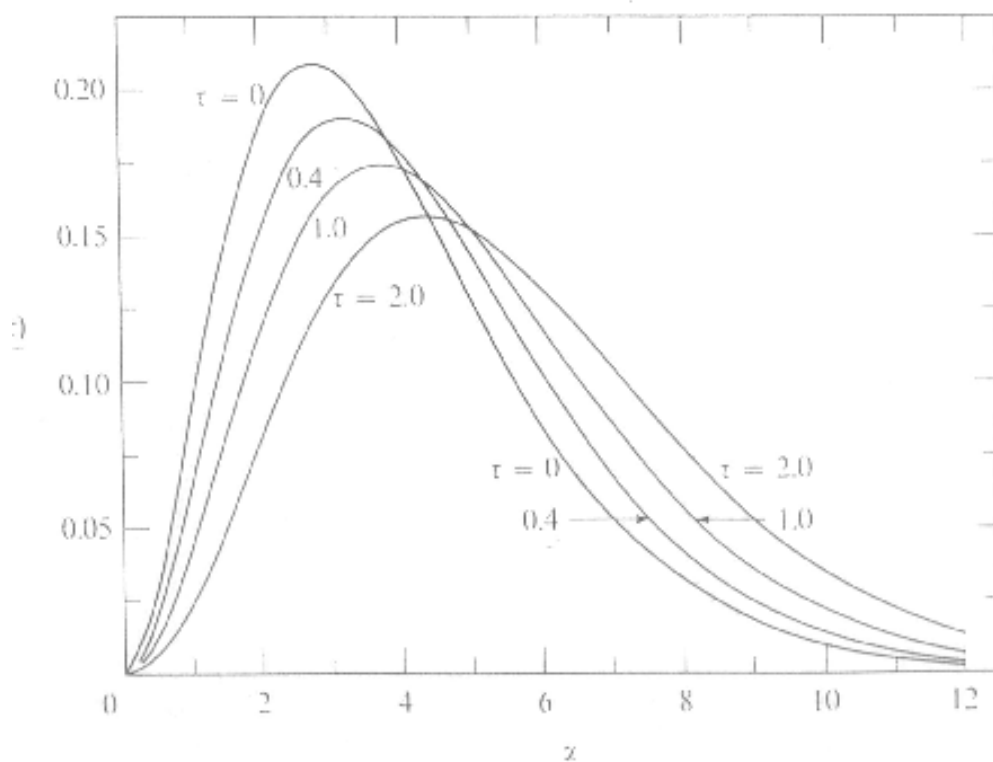
$$I_i(0, \mu_i < 0) = 0 \quad (4.26)$$

pozostają stałe Q oraz L_j . W tym celu należy rozwiązać odpowiedni algebraiczny układ równań liniowych powstały z wstawienia $\tau = 0$ do prawych stron (4.25). Mając wyznaczoną analitycznie $I_i(\tau)$ wstawiamy je do dyskretnego wzoru na J i funkcję Hopfa $q(\tau)$ otrzymujemy jako część nieliniową wyniku. Okazało się, że w ten sposób nie tylko można znaleźć dokładne wartości $q(\tau)$ ale dokonanie odpowiednich przejść w granicy $n \rightarrow \infty$ umożliwiło Hopfowi odgadnięcie analitycznej postaci funkcji nazwanej jego imieniem. Jest ona jednak na tyle skomplikowana, że prościej w rachunkach jest użyć rozwiązania Chandrasekhara. Warto tu wspomnieć, że równoległe do Chandrasekhara w USA analogiczne rozwiązanie zagadnienia transferu jak rozwinął polski astronom Stefan Piotrowski, lecz z powodu szalejącej wojny nie mogło ono być szerzej opublikowane.

4.2.3 Widmo atmosfery szarej

Zakładając w atmosferze szarej LRT mamy funkcję źródłową

$$S_\nu(\tau) = B_\nu(T(\tau)) \quad \text{gdzie } T^4 = \frac{3}{4} T_e^4(\tau + q(\tau)) \quad (4.27)$$



Rysunek 4.2: Widmo strumienia energii w atmosferze szarej na różnych głębokościach optycznych τ

Znając q lub jej przybliżenie znamy S_ν zatem widmo atmosfery szarej możemy znaleźć n.p. z operatorowej postaci rozwiązania formalnego r. transferu:

$$F_\nu(\tau) = 4\pi H_\nu = 2\pi \left[\int_\tau^\infty - \int_0^\tau \right] B_\nu(T(t)) E_2(|t - \tau|) dt \quad (4.28)$$

Rachunki wygodnie jest przeprowadzić w zmiennych bezwymiarowych

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT_e} \quad \text{oraz} \quad \frac{F_\alpha}{F} = \frac{F_\nu(\tau) d\nu}{F} \frac{d\alpha}{d\nu} \quad (4.29)$$

Wyniki przedstawiono na rysunku 4.2. Dla $\tau = 0$ kształt widma jest istotnie różny od widma c.d.cz. Dla $\tau = 2$ różnica maleje do grubości kreski na rysunku 4.2.

4.3 Atmosfera prawie szara

Założenie atmosfery szarej jest zbyt nierealistyczne, by za jej pomocą modelować widma gwiazd. Jak się okazało jednak, z różnic pomiędzy prawdziwym widmem a widmem szarym można snuć wnioski o rodzaju nieprzezroczystości w atmosferze gwiazdy. By to pokazać najpierw rozpatrzmy bardziej realistyczne przybliżenie atmosfery *prawie szarej*. W atmosferze prawie szarej dopuszczamy tylko małe odchylenia współczynnika absorpcji κ_ν od jego wartości $\bar{\kappa}$ uśrednionej po ν . Można zatem przyjąć, że

$$\kappa_\nu = \bar{\kappa}(1 + \beta_\nu) \quad \text{gdzie} \quad (4.30)$$

$$\beta_\nu \ll 1 \quad \frac{\partial \beta_\nu}{\partial \tau} = 0 \quad (4.31)$$

$$\bar{\kappa}H = \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu \quad (4.32)$$

W ostatniej równości $\bar{\kappa}$ określiliśmy jako średnią ważoną H_ν .

Podstawiając do równania transferu otrzymujemy

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau} = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} (I_\nu - B_\nu) = (1 + \beta_\nu)(I_\nu - B_\nu) \quad (4.33)$$

Widać, że w tym równaniu wyraz $\beta_\nu(I_\nu - B_\nu)$ jest mały. Rozwiążemy r. transferu metodą kolejnych przybliżeń, zakładając że ten mały wyraz można przybliżyć jego wartością wyliczoną z poprzedniego rozwiązania. Zaczynamy od przyjęcia $\beta_\nu I_\nu^{(0)} = 0$ co odpowiada atmosferze szarej dla której znamy już rozwiązanie $I_\nu^{(0)}$. W następnym przybliżeniu kładziemy $\beta_\nu I_\nu^{(1)} \approx \beta_\nu I_\nu^{(0)}$. Podstawiając do (4.33) mamy

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_\nu^{(1)}}{\partial \tau} &= I_\nu^{(1)} - B_\nu + \beta_\nu^{(1)}(I_\nu^{(0)} - B_\nu) \\ &= I_\nu^{(1)} - B_\nu + \beta_\nu \mu \frac{\partial I_\nu^{(0)}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Całkując stronami po $d\nu d\mu$ otrzymujemy

$$0 \equiv \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \tau} = J^{(1)} - B + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty d\nu \beta_\nu H_\nu^{(0)} \quad (4.35)$$

Lewa strona znika na mocy równowagi promienistej. Ostatni wyraz po prawej stronie można znaleźć z warunku dla średniej $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\kappa}H = \int_0^\infty \bar{\kappa}(1 + \beta_\nu)H_\nu^{(0)} d\nu = \bar{\kappa}H + \bar{\kappa} \int_0^\infty \beta_\nu H_\nu^{(0)} d\nu \quad (4.36)$$

Stąd wynika, że ostatni wyraz w (4.35) znika i

$$J^{(1)} = B(\bar{\tau}) \quad (4.37)$$

zatem atmosfera ma strukturę identyczną z atmosferą szarą.

Różnica pomiędzy szarą i prawie szarą atmosferą ujawnia się przy obliczaniu widma. Mianowicie dla znalezienia F_ν we wzorze analogicznym do (4.28) całkowanie należy wykonać po odpowiedniej grubości optycznej t_ν . Zamieniając zmienną całkowania na $\bar{\tau}$ gdzie $dt_\nu = (1 + \beta_\nu)$ wracamy do wzoru (4.28) pomnożonego o czynnik $1 + \beta_\nu$. Zatem widmo atmosfery prawie szarej będzie się różnić od widma atmosfery szarej właśnie o ten czynnik.

Autor modelu atmosfery szarej, Chandrasekhar, użył go do wyznaczenia β_ν dla widma ciągłego Słońca. Otrzymał zależność współczynnika absorpcji która nie pasowała do żadnego ze znanych atomów pospolicie występujących na Słońcu. W tym momencie przyszły noblista pokazał lwi pazur: przyjął, że za ta część absorpcji odpowiada nie znana odmiana najpospolitszego na Słońcu wodoru. O pierając się na znanych już rachunkach kwantowych dla atomu helu wykonał analogiczne rachunki dla protonu z dwoma elektronami. W oparciu o te rachunki wykazał że taki twór, zwany ujemnym jodem wodorowym (H^-) może być trwały i powoduje absorpcję o kształcie odpowiednim do obserwowanego β_ν .

4.4 Atmosfery nieszare: grzanie i chłodzenie

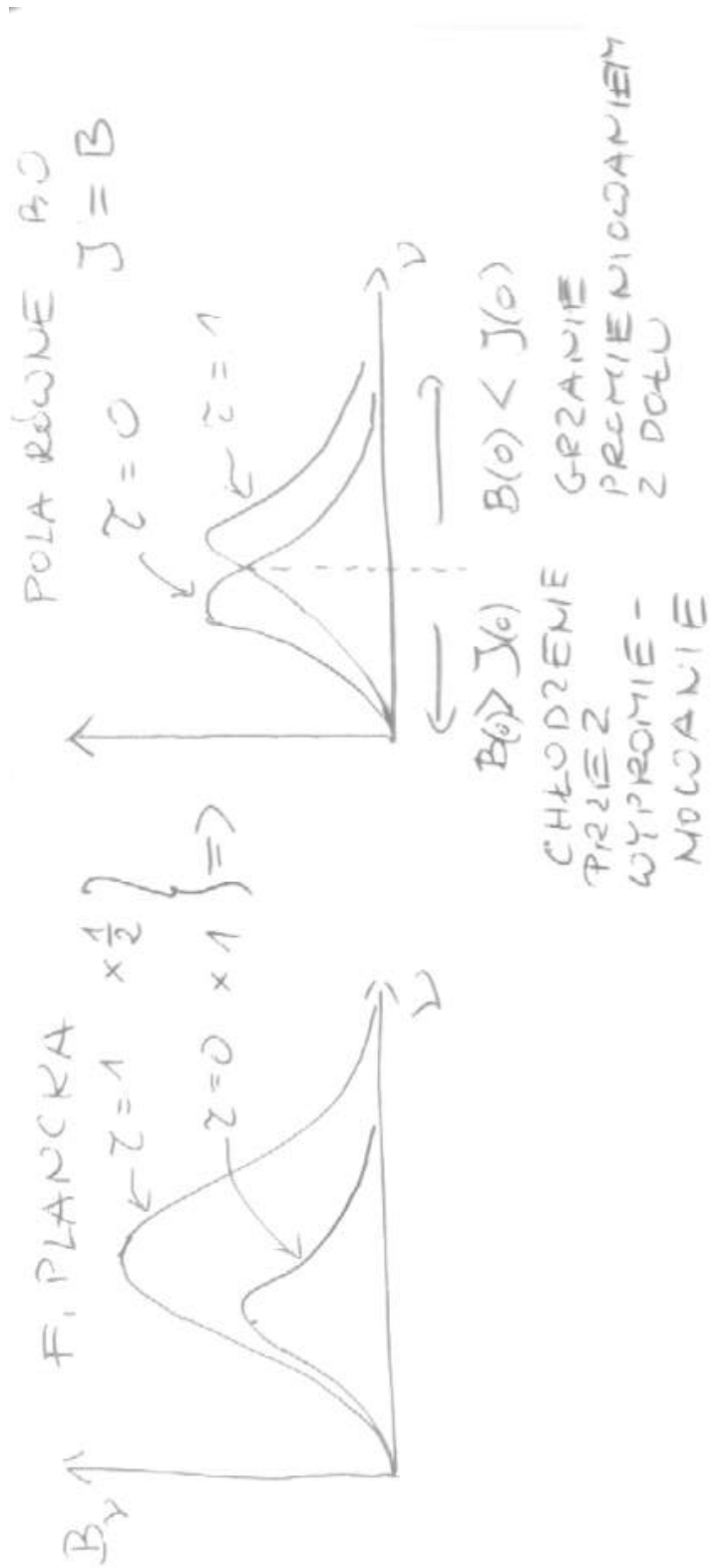
4.4.1 Przybliżenie Barbier-Eddingtona

W atmosferach nieszarych mamy nadal spełniony warunek równowagi promienistej $J = S = B$ ale $J_\nu \neq B_\nu$. Na mocy przybliżenia Barbier-Eddingtona (3.27) $I_\nu(0, \mu) \approx B_\nu(\mu)$. Całkując po półsferyze mamy

$$J_\nu(0) \approx \frac{1}{2} B_\nu(1/2) \quad \text{oraz} \quad (4.38)$$

$$S_\nu(0) \approx B_\nu(0) \quad (4.39)$$

Ponieważ temperatura rośnie z τ , zatem S_ν ma maximum w niższych częstościach niż J_ν . Z równowagi promienistej wynika, że pola pod obu krzywymi są jednakowe, zatem muszą się przecinać gdzieś pomiędzy swoimi maximami (Rys. 4.3). Stąd w niskich częstościach $S_\nu > J_\nu$ i powierzchnia atmosfery wyświeca więcej energii niż pochłania (patrz 3.10 i 3.11), mamy chłodzenie przez wypromieniowanie. W wysokich częstościach jest odwrotnie, mamy grzanie przez pochłanianie promieniowanie dochodzące od dołu. Warunek równowagi promienistej wymaga by te dwa procesy się znosiły, czyli mamy równowagę grzania i chłodzenia.



Rysunek 4.3: Podział widma na obszary grzania i chłodzenia atmosfery

4.4.2 Skokowe pochłanianie

Nieciągłość zależności pochłaniania od ν może wpływać na równowagę grzania i chłodzenia (Rys. 4.4). Jeśli z gładką zależnością χ_ν mamy na powierzchni równowagę przy temperaturze T_0 , to ze skokiem nieprzezroczystości przy ν_0 mamy T_0'' :

$$\int_0^\infty J_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T_0) d\nu \quad \text{gładka} \quad (4.40)$$

$$\int_{\nu_0}^\infty J_\nu'' d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T_0'') d\nu \quad \text{skok} \quad (4.41)$$

Ale na mocy przybliżenia Barbier-Eddingtona

$$J_\nu \approx (1/2)B_\nu(T(\tau = 1/2)) \quad (4.42)$$

$$J_\nu'' \approx (1/2)B_\nu(T(\tau'' = 1/2)) = (1/2)B_\nu(T_0) \quad (4.43)$$

bo ze względu na dodanie skokowej nieprzezroczystości gdy $\tau'' = 1/2$ to $\tau \ll 1/2$. Podstawiając (4.43) do (4.41) dostajemy

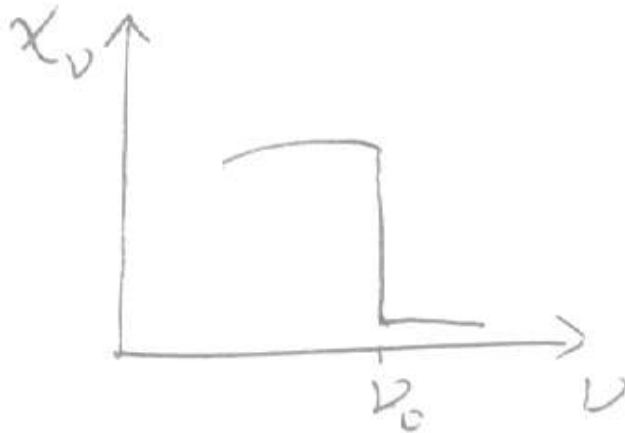
$$\frac{1}{2} \int_{\nu_0}^\infty B_\nu(T_0) d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T_0'') d\nu \quad \text{skok} \quad (4.44)$$

Aby nadrobić czynnik $1/2$ i węższe granice całkowania funkcja podcałkowa po lewej stronie musi być większa o ile równanie ma zachodzić. Zatem $T_0 > T_0''$. Pojawienie się skoku nieprzezroczystości prowadzi do ochłodzenia powierzchni. Równocześnie w głębszych warstwach dodatkowa nieprzezroczystość zmniejsza efektywny współczynnik transportu ciepła (3.38), zatem dla transportu zadanego strumienia potrzeba stromszego gradientu temperatury i głębsze warstwy ulegają podgrzaniu. Ten efekt oraz omówiony w par. 4.4.1 efekt grzania/chłodzenia przez promieniowane można dostrzec w wynikach rachunków modelu atmosfery na rys. 4.5 i 4.6.

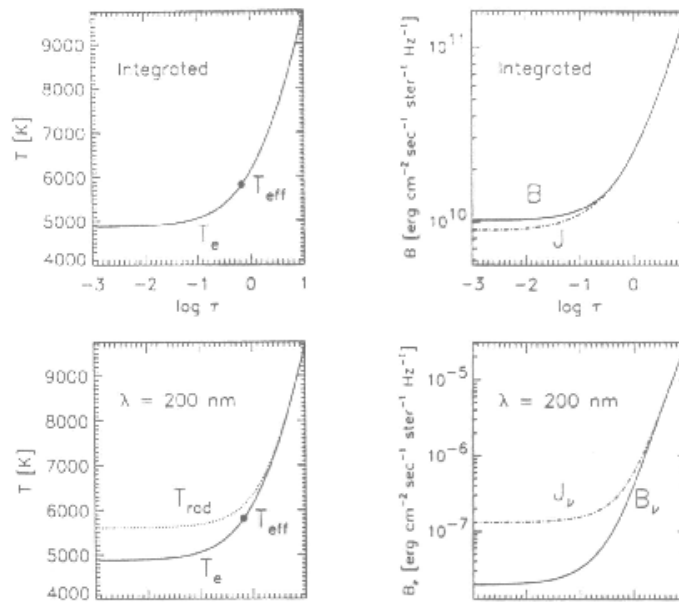
4.4.3 Efekt przesłaniania (blanketingu)

Dosyć niedawno zauważono, że słabe linie od mniej obfitych pierwiastków (n.p. Fe i Ni) też mogą mieć istotny wpływ na transfer promieniowania a to dzięki ich olbrzymiej liczbie przekraczającej 10^6 (Anderson ***). Związany z nimi efekt nazywa się przesłanianiem lub *blanketingiem*.

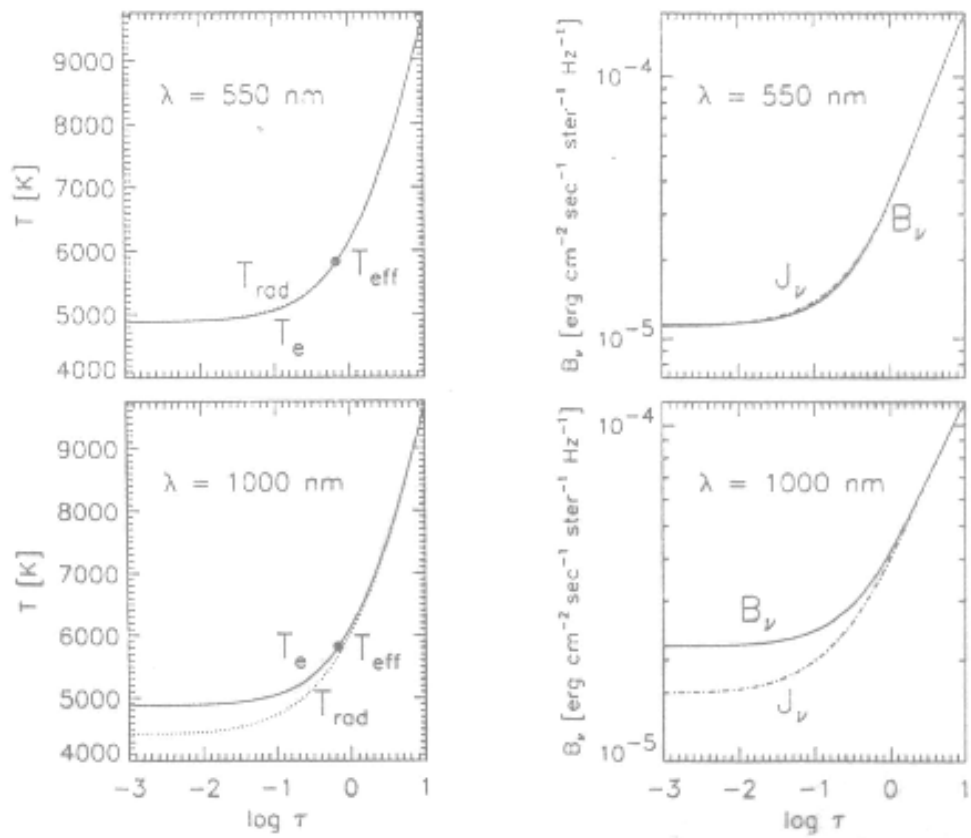
Przy takich ilościach linii można je uwzględniać tylko w jakiś przybliżony, statystyczny sposób. Opracowane metody zasadzają się na podzieleniu całego widma na kilkadziesiąt przedziałów i w każdym z nich przyjęcia jakiegoś prostszego rozkładu nieprzezroczystości po długościach fal ale o podstawowych włas-



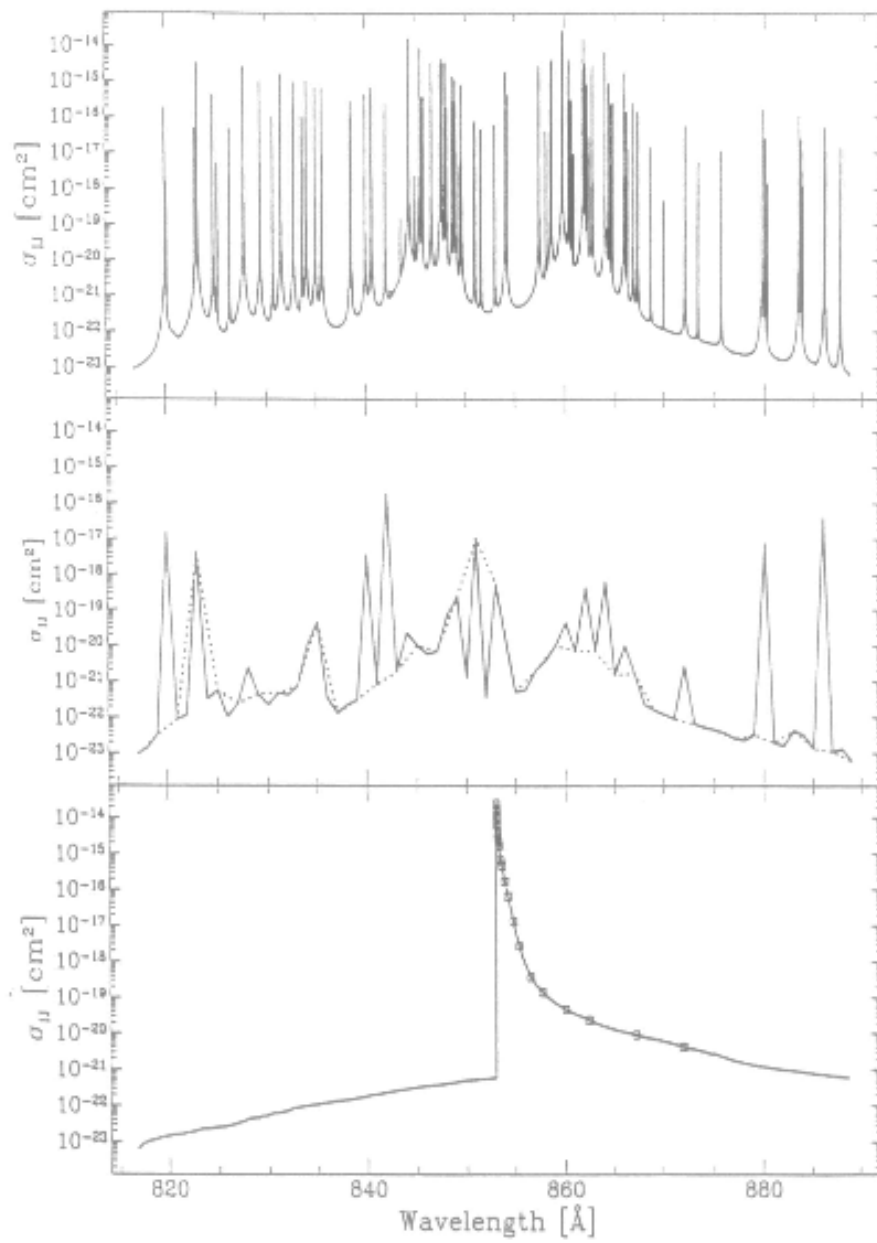
Rysunek 4.4: Nieciągłość w widmie pochłaniania



Rysunek 4.5: Wynik obliczeń dla atmosfery nie-szarej. W górnych panelach przebieg temperatury i wycłkowanej po częstościach funkcji źródłowej B oraz średniego natężenia J . Ich zgodność świadczy o zachowaniu równowagi promienistej. Pozostałe panele tu i na rys. 4.6: rozkład B_ν oraz J_ν dla wybranych częstości ν . Zauważ grzanie przez promieniowanie ($J_\nu > B_\nu$) dla $\lambda = 200nm$ oraz chłodzenie dla fal długich.



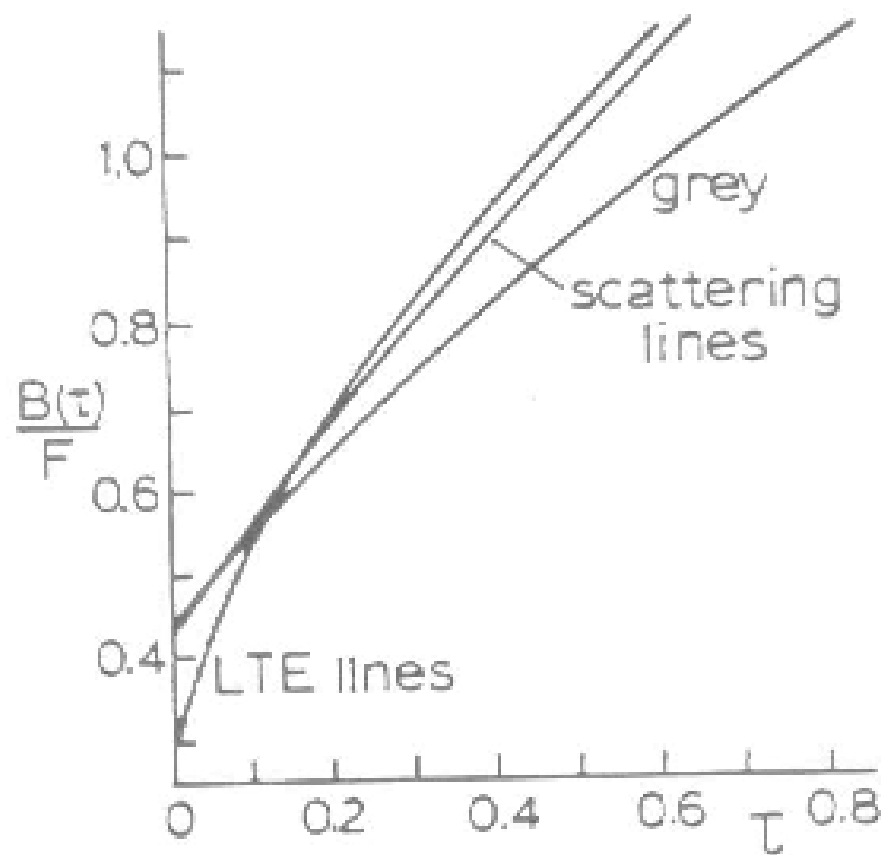
Rysunek 4.6: Kontynuacja rys. 4.5



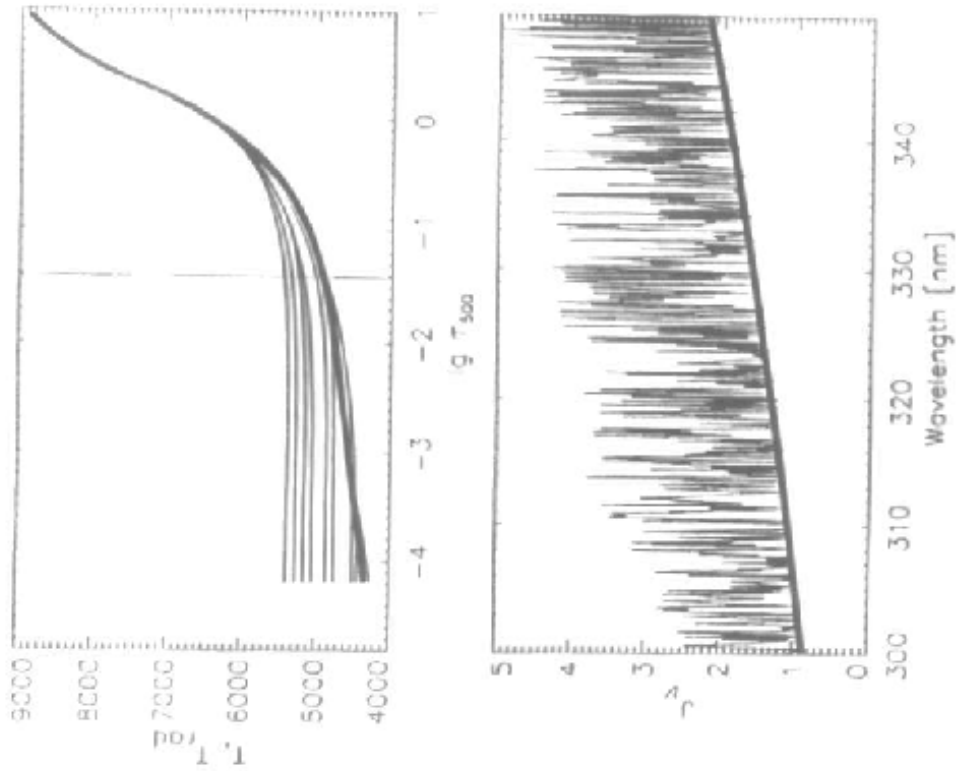
Rysunek 4.7: Efekt blanketingu: a) przykład rzeczywistego widma pochłaniania, b) jego przybliżenie poprzez próbkowanie oraz c) poprzez histogram

nościach statystycznych takich jak prawdziwy rozkład nieprzezroczystości. Istnieją dwie takie metody uwzględnienia blankettingu w rachunkach, oparte na histogramie nieprzezroczystości i na losowym próbkowaniu wartości nieprzezroczystości. W pierwszej z nich jako nieprzezroczystość wybiera się pewną gładką, często monotoniczną na przedziale funkcję częstości, której histogram wartości jest taki sam jak histogram realnej nieprzezroczystości. N.p. w takiej samej części przedziału obie funkcje przyjmują wartości większe niż 10^{-17}cm^2 , podobnie dla 10^{-18}cm^2 , i.t.d. W drugiej metodzie losowo wybieramy kilkadziesiąt długości fali w przedziale i łącząc je łamaną przyjmujemy za nieprzezroczystość. Oczywiście taka łamana będzie miała znacznie mniej maksimum (linii) niż prawdziwa nieprzezroczystość, ale w granicy dużej ilości losowań histogramy sztucznej i realnej nieprzezroczystości winny być bliskie. W praktyce, gdy żądamy takiej samej dokładności metoda losowań jest powolniejsza. Potrzebny do rachunków katalog ponad $2 \cdot 10^6$ linii widmowych został sporządzony przez Kurucza i współpracowników.

Efekt przesłaniania ma podobny wpływ na strukturę atmosfery jak dodanie skokowej nieprzezroczystości: utrudniając transport promieniowania wymusza stromszy gradient temperatury, podgrzewając głębsze warstwy. W żargonie zjawisko takie określa się słowem backwarming, co można rozumieć jako *podgrzanie zaplecza*. Ilustrację tego zjawiska przedstawiono na rys. 4.8. Dodanie w atmosferze szarej pochłaniania w liniach powoduje przesłanianie i znacznie stromszy gradient temperatury. Natomiast dodanie do modelu jeszcze rozpraszania w liniach powoduje zmniejszenie gradientu, bowiem rozpraszanie w skrzydłach umożliwia ucieczkę fotonów z głębszych warstw atmosfery. Wygląd widma w atmosferze chłodnej gwiazdy z silnym przesłanianiem przedstawiono na rys. 4.9. Można tam też zauważyć, że promieniowanie wychodzące jest podgrzane względem materii fotosfery.



Rysunek 4.8: Zmiana f. świecenia (zatem i temperatury) z głębokością w atmosferze szarej, LTE z uwzględnieniem linii absorpcyjnych oraz z dodaniem rozpraszania w liniach.



Rysunek 4.9: Rozkład widma (panel dolny) i temperatury promieniowania (panel górny) w atmosferze LTE z uwzględnieniem linii (przełaniania) w przedziale ultrafioletowym widma.

Rozdział 5

Odziaływanie promieniowania z materią

5.1 Równowaga promienista a rozkład temperatury

Już wcześniej przy okazji dyskusji atmosfer szarej i efektów w atmosferach nieszarzych okazało się, że ustalenie rozkładu temperatury $T(\tau)$ w atmosferze wiąże się ze spełnieniem warunku równowagi promienistej $J = S$, inaczej warunku zachowania energii. Omówimy tutaj kilka metod praktycznych pozwalających na znalezienie rozkładu $T(\tau)$. Wszystkie one opierają się na iteracjach polegających na założeniu $T(\tau)$, n.p. z rozwiązania Eddingtona, znalezieniu rozwiązania r.transferu, znalezienia poprawek do rozkładu temperatury i następnej iteracji, aż do uzyskania zadowalającej zbieżności rozwiązań.

5.1.1 Iteracje lokalne

Niech $T(\tau)$ oznacza prawdziwy rozkład temperatury w atmosferze a $T_0(\tau)$ jego wyjściowe przybliżenie. Chcemy znaleźć funkcję poprawek ΔT taką, że $T(\tau) = T_0(\tau) + \Delta T$. Przy takich oznaczeniach warunek równowagi promienistej ma postać $\chi J = \chi S$ lub

$$\begin{aligned} \int_{\nu_0}^{\infty} \chi_{\nu} J_{\nu} d\nu &= \int_{\nu_0}^{\infty} \chi_{\nu} B_{\nu}(T_0 + \Delta T) d\nu = \\ &= \int_0^{\infty} \chi_{\nu} B_{\nu}(T_0) d\nu + \Delta T \int_0^{\infty} \chi_{\nu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T} d\nu \end{aligned}$$

Przy czym ostatnie wyrażenie otrzymaliśmy z szeregu Taylora funkcji podcałkowej. Rozwiązując mamy wyrażenie na poprawki

$$\Delta T = \frac{\int_0^{\infty} \chi_{\nu} [J_{\nu} - B_{\nu}(T_0)] d\nu}{\int_0^{\infty} \chi_{\nu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial T} d\nu} \quad (5.1)$$

Wadą tej metody jest fakt, że dla $\tau \rightarrow \infty$ $\Delta T \rightarrow 0$ bo $J_\nu \approx B_\nu$. Efektywnie, na każdym kroku poprawiane są warstwy o głębokości większej tylko o $\Delta\tau = 1$ niż poprzednio, bo z przybliżenia Barbier-Eddingtona, na takim dystansie J_ν i B_ν mogą się istotnie różnić. Nie nadaje się ona zatem do praktycznych rachunków, jest za wolna.

5.1.2 Metoda Unsoelda-Lucyego

Metoda Unsoelda-Lucyego jest najprostszą choć nie najszybszą z dość wydajnych metod by je stosować. Będziemy rozpatrywać osobno rozpraszanie i pochłanianie rzeczywiste, zatem napiszemy $\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$ i równanie transferu jako

$$-\frac{\mu}{\rho} \frac{dI_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)I_\nu - \kappa_\nu B_\nu - \kappa_\nu J_\nu \quad (5.2)$$

Licząc 0 i 1 moment mamy:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dH_\nu}{dz} = \kappa_\nu J_\nu - \kappa_\nu B_\nu \quad (5.3)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dK_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)H_\nu \quad (5.4)$$

Dalej wprowadzamy 3 nowe średnie nieprzezroczystości:

$$\kappa_P B = \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa_\nu B_\nu d\nu \quad (5.5)$$

$$\kappa_J J = \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa_\nu J_\nu d\nu \quad (5.6)$$

$$\kappa_H H = \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa_\nu H_\nu d\nu \quad (5.7)$$

Wprowadzając grubość optyczną $d\tau = -\kappa_P \rho dz$ i całkując równania momentów po $d\nu$ otrzymujemy

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{\kappa_J}{\kappa_P} J - B \quad (5.8)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{\kappa_H}{\kappa_P} H \quad (5.9)$$

Interpretacja momentu 0 jest prosta: gdy $J \neq B$ to $\kappa_J \neq \kappa_P$ zatem $H \neq const$. Teraz całkujemy drugie z równań i korzystamy z przybliżenia Eddingtona $J(\tau) = 3K(\tau)$ oraz $J(0) = 2H(0)$, (2.34) i (2.35). W ten sposób otrzymujemy J . Podstawiając do (5.8) otrzymujemy poprawione B:

$$K(\tau) = \int_0^\tau \frac{\kappa_H}{\kappa_P} H(t) dt + C \quad \text{gdzie } C = \frac{2}{3} H(0) \quad (5.10)$$

$$J(\tau) = 3 \int_0^\tau \frac{\kappa_H}{\kappa_P} H(t) dt + 2H(0) \quad (5.11)$$

$$B(\tau) = \frac{\kappa_J}{\kappa_P} J - \frac{dH}{d\tau} = \frac{\kappa_J}{\kappa_P} \left[3 \int_0^\tau \frac{\kappa_H}{\kappa_P} H(t) dt + 2H(0) \right] - \frac{dH}{d\tau} \quad (5.12)$$

Biorąc różniczkę tego ostatniego równania otrzymuję wzór na poprawki

$$\Delta B(\tau) = \frac{\kappa_J}{\kappa_P} \left[3 \int_0^\tau \frac{\kappa_H}{\kappa_P} \Delta H(t) dt + 2\Delta H(0) \right] - \frac{d\Delta H}{d\tau} \quad (5.13)$$

przy czym różnice $\Delta H = H(\tau) - H_0$ odnoszą się do różnicy H z ostatniej iteracji modelu i zadanej z góry wartości strumienia w atmosferze $H_0 = F/4\pi = \sigma T_e^4/4\pi$. Znając zależność $B(T)$ z poprawek ΔB mamy poprawki $\Delta T = \Delta B/(dB/dT)$.

Poprawki Unsoelda-Lucyego osiągają znaczne wartości zarówno na powierzchni jak i w środku atmosfery. Jest tak bo trzy wyrazy po prawej stronie przyjmują następujące wartości w granicy $\tau = 0, \infty$:

wyraz -	I	II	III
powierzchnia	znika	nielokalny w.brzegowy	lok.poprawka
wnętrze	dominuje	”	mały

W ten sposób zapewniona jest dostatecznie szybka zbieżność we wszystkich warstwach modelu.

5.1.3 Metoda Avretta-Krooka

Metoda Avretta-Krooka polega na równoczesnym poprawianiu skal T i τ . W ten sposób szybciej osiąga się model w równowadze promienistes. W tej metodzie szukamy zatem zarówno ΔT jak i $\Delta\tau$. Podobnie jak poprzednio potrzebne wzory wyprowadza się z momentów r. transferu, ale ze względu na różniczkowanie po dwu zmiennych rachunki są bardziej żmudne. Ograniczymy się do podania ostatecznych wzorów bez ich dowodu. Poprawki $\Delta\tau$ otrzymujemy całkując numerycznie równanie

$$\frac{d\Delta\tau}{d\tau} + \Delta\tau \int_0^\infty \frac{H_\nu \frac{dX_\nu}{d\tau}}{H_\nu X_\nu} d\nu = \left(1 - \frac{H_0}{H(\tau)} \right) \quad (5.14)$$

Mając $\Delta\tau$ wyznaczamy ΔT z następującego wzoru:

$$\begin{aligned} \Delta T(\tau) = & \left\{ \left(1 + \frac{d\Delta\tau}{d\tau} \right) \int_0^\infty X_\nu (1 - \rho_\nu) (J_\nu - B_\nu) d\nu + \right. \\ & + \Delta\tau \int_0^\infty \left[\frac{dX_\nu}{d\tau} (1 - \rho_\nu) - X_\nu \frac{d\rho}{d\tau} \right] (J_\nu - B_\nu) d\nu + \\ & \left. + \sqrt{3} \left(\frac{H_0}{H(\tau)} - 1 \right) + \int_0^\infty X_\nu H_\nu(0) (1 - \rho_\nu) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int_0^\infty X_\nu (1 - \rho_\nu) \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right]^{-1} \quad \text{gdzie} \quad (5.15) \\ \tau &= \tau_{\nu_0} \\ X &= \chi_\nu / \chi_{\nu_0} \\ \rho_\nu &= \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} = \frac{\sigma_\nu}{\chi_\nu} \end{aligned}$$

natomiast $\rho_\nu, X_\nu, J_\nu, H_\nu, B_\nu$ są wzięte z poprzedniej iteracji.

5.1.4 Inne

Konwekcja może odgrywać rolę w transporcie energii w atmosferze gdy głęboko pod fotosferą jonizacja jest częściowa. Taka sytuacja zachodzi w gwiazdach chłodnych. Wówczas warunek zachowania energii ma postać

$$F_{conv} + F_{rad} = F = const \quad (5.16)$$

Natomiast samo $F_{rad} \neq const$. Przy obliczaniu F_{conv} korzysta się z t.zw. teorii drogi mieszania o której mowa w wykładzie fizyki wewnątrz gwiazd.

Istnieje jeszcze inna metoda wyznaczania T : Rozwijamy w szereg Taylora wszystkie równania modelu atmosfery, łącznie z funkcjami materiałowymi, ucinając na wyrazie liniowym. W ten sposób dostajemy gigantyczny układ równań liniowych na poprawki wszystkich parametrów, w tym i T . Jest to t.zw. metoda całkowitej linearyzacji rozwijana przez Mihalasa i in. Była ona dość popularna. Jej wadą wobec metod bardziej ws"półczesnych jest konieczność analitycznego różniczkowania i zaprogramowania znacznej ilości wyrazów w równaniach.

5.2 Fizyka oddziaływania promieniowania z materią

5.2.1 Profile linii

Nieprzezroczystość w linii w funkcji częstości będziemy przedstawiać jako

$$\begin{aligned} \kappa(\Delta\omega) &= \kappa_0 \Phi(\Delta\omega) \quad \text{gdzie} \quad (5.17) \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Delta\omega) d\omega \quad \text{jest unormowaniem} \end{aligned}$$

parametr $\kappa_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\Delta\omega) d\omega$ nazywamy średnią nieprzezroczystością w linii a $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ jest odległością od środka linii w częstości kołowej. Nieprzezroczystość w centrum linii jest $\kappa(0)$. Szerokość linii $\Delta\omega$ można oszacować z warunku $\kappa(0)\Delta\omega \sim \kappa_0$. Ten przykład ilustruje różnicę w mianach κ_0 i $\kappa(0)$.

Profile nieprzezroczystości w linii mogą zależeć od wiele różnych efektów fizycznych. Na szczęście okazuje się, że pospolite mechanizmy określające te profile prowadzą tylko do dwu podstawowych kształtów. Dlatego omówimy je w pierwszej kolejności.

Profil Lorentza

Prostym klasycznym obrazem oddziaływania promieniowania z elektronem atomowym jest działanie periodycznej siły wymuszającej na tłumiony oscylator harmoniczny. Jeśli siła wymuszająca pola elektrycznego promieniowania jest $Ee^{i\omega t}$ to równanie drgań elektronu jest

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Ee^{i\omega t} \quad (5.18)$$

gdzie γ jest współczynnikiem tłumienia a ω_0 częstością drgań własnych. Początkowo spokojny elektron wskutek działania pola elektrycznego zaczyna drgać z amplitudą rosnącą aż do ustalenia się stany stacjonarnej ze stałą amplitudą $x = Ae^{i\omega t}$. Podstawiając do (5.18) i upraszczając wspólny czynnik $e^{i\omega t}$ znajdujemy równanie dla amplitudy końcowej:

$$-\omega^2 A + i\gamma\omega A + \omega_0^2 A = E \quad (5.19)$$

Przy braku siły wymuszającej ($E = 0$) widać, że drgania własne dla $A \neq 0$ są możliwe tylko bez tłumienia ($\gamma = 0$) i z częstością ω_0 , bo inaczej nie jest możliwe równoczesne znikanie obu stron (5.19). Przy obecności tłumienia ($\gamma > 0$) w rozwiązaniu bez siły wymuszającej musimy dopuścić ω zespolone tak, by $-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, czyli $\omega = i\gamma/2 \pm \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/2\omega_0)^2}$. Obecność tłumienia powoduje pojawienie się w rozwiązaniu x czynnika $|e^{i\omega t}| \sim e^{-\gamma t/2}$. Zarówno droga jak i siła działająca na oscylator maleją proporcjonalnie do $Ae^{-\gamma t/2}$, zatem praca maleje jak $A^2 e^{-\gamma t}$. Podobnie maleje i energia oscylatora, tak, że po czasie $T = 1/\gamma$, zmniejsza się o czynnik e . Wracając do elektronu w atomie ten czas odpowiada czasowi życia oscylacji w stanów wzbudzonym atomu. Zanik oscylacji wiąże się z reemisją promieniowania, zatem T jest też średnim czasem emisji promieniowania. W tym obrazie tłumienie jest spowodowane siłami reakcji pola elektrycznego, na wysyłanie fali przez atom.

Wracając do klasycznych drgań wymuszonych, ($|E|^2 > 0$), pochłaniania przez oscylator energia jest proporcjonalna do $|A|^2$. Biorąc kwadrat modułu równania (5.19) $|A|^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2] = |E|^2$. Rozwiązując mamy

$$|A|^2 = \frac{|E|^2}{(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2 \omega^2} \rightarrow \frac{|E|^2}{4\omega_0^2 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right]} \quad (5.20)$$

Z wzoru wynika, że $|A|^2$ spada o czynnik 2 w odległości $\Delta\omega = \gamma/2$. Granica odpowiada małowemu tłumieniu, $\gamma\omega \ll 1$, wówczas mieralne wartości amplitudy osiągają tylko dla $\omega \approx \omega_0$. Ten rodzaj zależności pochłaniania od częstości ω nazywa się profilem Lorentza. W postaci unormowanej, $\int \Phi d\omega = 1$ profil Lorentza ma postać

$$\Phi_L(\Delta\omega)d\omega = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\Delta\omega^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} d\omega \quad (5.21)$$

Profil Dopplera

Atomy znajdują się w ciągłym ruchu wobec czego na ich oddziaływanie z promieniowaniem wpływa efekt Dopplera przesuwający częstości o

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{v_x}{c} \quad (5.22)$$

gdzie v_x jest składową prędkości w kierunku rozchodzenia się promieniowania. Jeśli sama linia jest monochromatyczna, to jej wypadkowy profil będzie po prostu zadany rozkładem prędkości v_x . Jeśli gaz spoczywa, to wiadomo, że $\langle v_x \rangle = 0$ oraz $m \langle v_x^2 \rangle / 2 = kT \equiv mv_T^2/2$. Ten ostatni warunek to definicja absolutnej temperatury T i średniej prędkości termicznej v_T . Sam rozkład v_x jest szczególnym wypadkiem rozkładu Gaussa

$$f(v_x)dv_x \sim e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \quad (5.23)$$

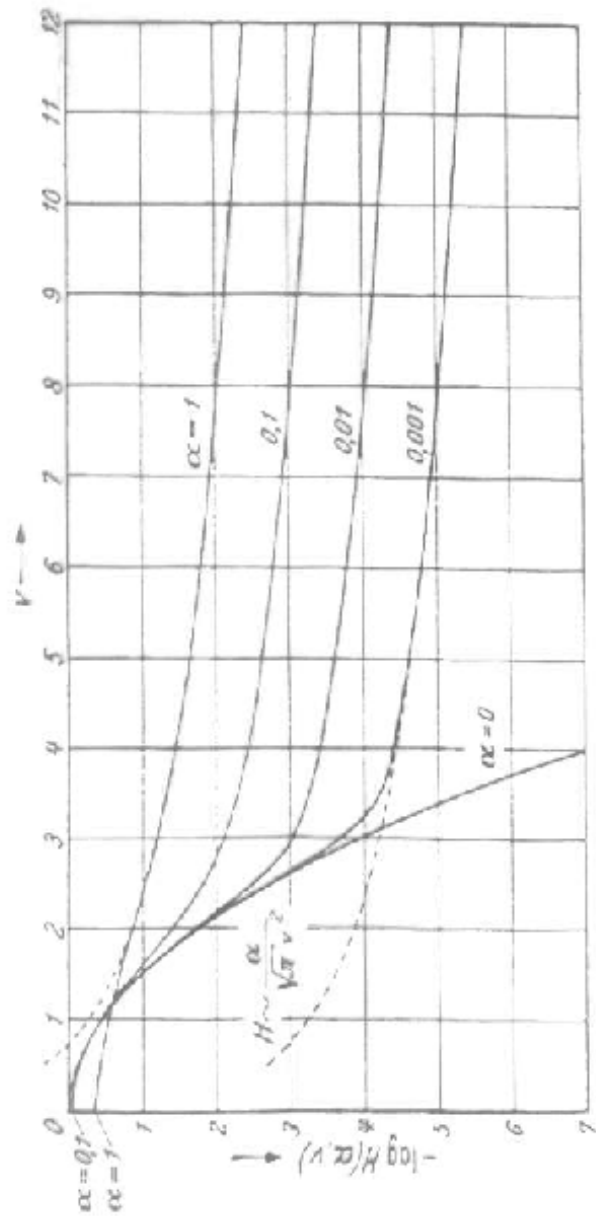
zwanym rozkładem Maxwella. Wprowadzając nowy parametr $\Delta\omega_D$ i normując otrzymujemy profil Dopplera linii

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\omega)_D d\omega &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2} d\omega \quad \text{gdzie} \quad (5.24) \\ \frac{mv_x^2}{2kT} &= \left(\frac{v_x}{v_T}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta\omega}{v_T\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2 = w^2 \end{aligned}$$

Profil Voigta

W ogólnym przypadku szerokości linii Lorentza bywa porównywalna z poszerzeniem Dopplera. Wypadkowy profil linii, zwany profilem Voigta jest splotem profilu Lorentza i Dopplera $\Phi(w) = \Phi_D * \Phi_L \equiv \int \Phi_D(y)\Phi_L(w-y)dy$ czyli

$$\begin{aligned} \Phi(w)_V dw &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} H(a, w) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(w-y)^2 + a^2} dy \quad \text{gdzie} \quad (5.25) \\ w &= \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D} \quad a = \frac{\gamma}{2\Delta\omega_D} \quad \Delta\omega_D = \sqrt{\frac{2kT}{mc^2}} \omega_0 \end{aligned}$$



Rysunek 5.1: Profil Voigta dla różnych parametrów α . Dla $\alpha = 0$ otrzymujemy profil Dopplera. Asymptotyczny profil Lorentza zaznaczono linią przerywaną.

W przypadku granicznym $a \ll 1$ mamy $H(a, w) \rightarrow e^{-w^2} + a/(\sqrt{\pi}w^2)$ (Rys. 5.1).

5.2.2 Mechanizmy poszerzenia linii

Profil naturalny

W przypadku kwantowym mamy zasadę nieoznaczoności $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ oraz energię kwantu $E = \hbar\omega$. Jeśli na kształt linii wpływa rozmycie tylko jednego poziomu to mamy $\Delta\omega \Delta t = 1$. Stąd widać, że $\gamma = 1/\Delta t$ ma sens rozmycia poziomu energetycznego.

W mechanice kwantowej naturalny profil linii wynika ze skończonego czasu życia Δt atomu w stanie wyjściowym, co na mocy zasady nieoznaczoności pociąga rozmycie energii tego stanu $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Jeśli mamy tylko dwa stany, górny o energii E_1 i dolny o energii 0 i niech prawdopodobieństwo wytrwania w stanie wyjściowym jest $P = P(t)$ a opuszczenia stanu w przedziale czasu dt jest γdt , gdzie γ to pewna stała atomowa, to prawdopodobieństwo pozostania w danym stanie po czasie $t + dt$ jest $P - dP = P(1 - \gamma dt)$ skąd $dP/P = -\gamma dt$ i całkując $P = e^{-\gamma t}$ dla założonego $P(0) = 1$. Stąd średni czas życia jest $\Delta t = \int t dP = \int t e^{-\gamma t} \gamma dt = 1/\gamma$. Jeśli jest to stan wzbudzony o energii E_1 , to wartość oczekiwana energii atomów po czasie t jest $E(t) = E_1 P(t) + 0[1 - P(t)] = E_1 e^{-\gamma t}$, zatem analogicznie do klasycznego oscylatora harmonicznego. Stąd naturalny profil kwantowy linii jest profilem Lorentza o szerokości $\Delta\omega = \gamma$. Drobną komplikacją pojawia się gdy mamy wiele poziomów w atomie. Musimy wprowadzić oddzielne oznaczenia dla szerokości poziomu Γ_i oraz prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy parą poziomów R_{ij} . Dla dwu poziomów mamy $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_0$. Jeśli stan podstawowy jest trwały to $\Delta t_0 = \infty$ i $\Gamma_0 = 0$ i $\gamma = \Gamma_1 = R_{10}$. W przypadku ogólnym zamiast tej ostatniej równości dla przejścia między poziomem l i u mamy:

$$\gamma = \Gamma_l + \Gamma_u \quad (5.26)$$

$$\Gamma_i = \sum_{j \neq i} R_{ij} \quad (5.27)$$

Zwykle dla $i < j$ $R_{ij} = 0$ i pozostaje niewiele wyrazów sumy. Typowe szerokości naturalne linii są rzędu $\gamma \sim 10^{-4}$.

Poszerzenie zderzeniowe (ciśnieniowe)

W gęstym gazie, zderzenia są częste, bo ich ilość jest proporcjonalna do ilości par cząstek w objętości $\sim \rho^2$. Prawdopodobieństwo przejścia zderzeniowego na cząstkę wówczas jest $R_{ij, zd} \equiv C_{ij} \sim \rho^2/\rho \sim \rho$. Jeśli skutek tego czas życia atomu w danym stanie jest krótszy niż naturalny, $\gamma \sim 1/\Delta t$ rośnie i mówimy

o poszerzeniu zderzeniowym. Kształt profilu pozostaje podobny ale teraz jego szerokość zależy od C_{ij} . Bardzo poszerzone linie obserwuje się w atmosferach białych karłów, gdzie gęstości są wielkie.

Mikroturbulencja

Zdjęcia Słońca pokazują t.zw. granulację. Jest ona wywołana ruchem elementów gazu tuż pod fotosferą, trochę tak przy gotowaniu konwekcja burzy spokojną powierzchnię cieczy. Te ruchy gazu są zwane mikroturbulencją a występują w wielu gwiazdach. Powodują one pewien efekt Dopplera. Podobnie jak dla ruchu atomów, można przyjąć, że rozkład prędkości elementów też jest rozkładem Maxwella ze średnią prędkością v_M . Wypadkowy profil wskutek ruchu termicznego i mikroturbulencji nadal jest profilem dopplera o średniej prędkości v , takiej, że

$$v^2 = v_T^2 + v_M^2. \quad (5.28)$$

O takiej postaci wzoru decyduje fakt, że ruchy atomów i elementów gazu są losowe i od siebie nie zależne, zatem stosuje się do nich podobne prawo jak do dodawania niezależnych błędów o rozkładzie Gaussa-Maxwella.

Inne efekty w profilach linii

Z pozostałych efektów na wyminięcie zasługuje rotacja gwiazd, ich pulsacje (przesuwające i deformujące powierzchnię), a także wiatr gwiazdowy związany z ruchem wyższych warstw atmosfery. W przypadku rotacji profil linii dąży do połówki elipsy. Inne efekty prowadzą do skomplikowanego kształtu linii.

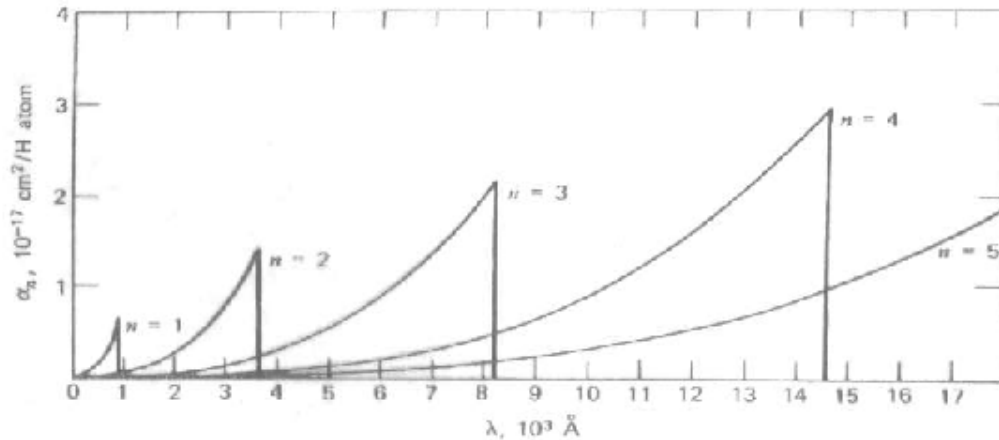
5.2.3 Rodzaje przejść atomowych

Ze względu na położenie pod lub ponad poziomem jonizacji stany energetyczne elektronu w atomie dzielimy na związane i swobodne. Te pierwsze z reguły odpowiadają dyskretnym wartościom energii (choć nieco rozmytym wskutek zasady nieoznaczoności), te drugie tworzą kontinuum stanów o ciągłej wartości dopuszczalnej energii. Na tej klasyfikacji opiera się podział przejść odpowiadających pochłonięciu fotonu i wzbudzeniu atomu na przejścia swobodno-swobodne (s-s), związane-swobodne (z-s) oraz związane-związane (z-z) (Rys. 5.2).

Elektron może pochłoniąć tylko foton o wystarczającej do przejścia energii. Wobec tego przejściom z-z odpowiadają linie widmowe a przejściom z-s granice pochłaniania. Przy tym graniczna energia fotonu odpowiada energii jonizacji atomu. Ponieważ energia jonizacji atomu z różnych poziomów jest różna, zatem jeden atom może posiadać kilka takich granic. Ilustrujemy to na rys. 5.3 na przykładzie atomu H .



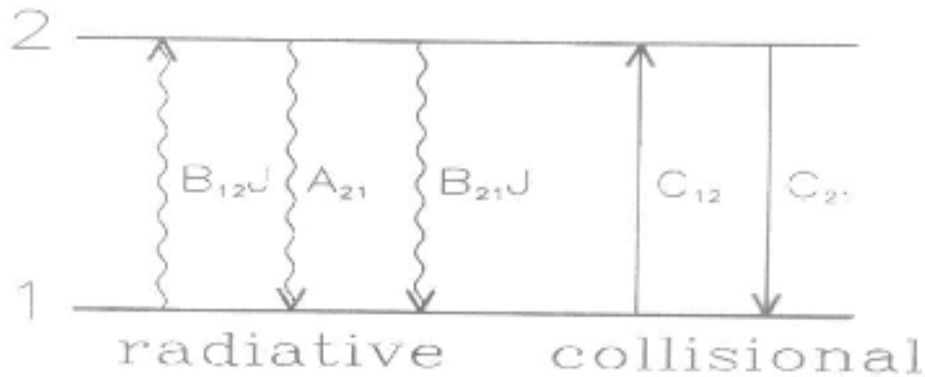
Rysunek 5.2: Rodzaje przejść atomowych ze względu na rodzaj cząstek (górny panel) oraz ze względu na związanie stanu wyjściowego i końcowego (dolny panel).



Rysunek 5.3: Widmo pochłaniania z-s dla atomu H .

Z punktu widzenia cząstek biorących powodujących przejścia elektronu pomiędzy stanami atomu procesy dzielimy na pochłanianie i emisję fotonu oraz zderzenia. Przy pochłanianiu fotonu energia elektronu rośnie o energię fotonu, przy emisji maleje o tyle samo a w przypadku zderzenia może ulec zmianie w różnych kierunkach, w zależności od okoliczności rozróżniamy wzbudzenie i de-ekscytację zderzeniową (Rys. 5.2).

Jeśli rozważymy przejścia jedynie pomiędzy dwoma poziomami, to schematycznie można je przedstawić tak jak na rys. 5.4. Prawdopodobieństwa wzbudzeń i deekscytacji zderzeniowych oznaczyliśmy przez C_{12} i C_{21} . Prawdopodobieństwo absorpcji jest proporcjonalne do średniego natężenia promieniowania, zatem oznaczyliśmy je przez $B_{12}J$. Natomiast prawdopodobieństwo emisji jako nie zależne od otoczenia atomu oznaczyliśmy A_{21} . Dlatego nazywa się ją też emisją spontaniczną. Widać tu brak symetrii. To nasunęło Einsteinowi myśl o istnieniu jeszcze jednego procesu emisji, dokładnie odwrotnego względem absorpcji i spowodowanego oświetleniem. Prawdopodobieństwo tej tak zwanej wymuszonej emisji oznaczamy $B_{21}J$. Natomiast proces odwrotny do spontanicznej emisji nie zachodzi, bo łamie zasadę zachowania energii.



Rysunek 5.4: Oznaczenia przejść pomiędzy poziomami.

5.2.4 Współczynniki Einsteina

Postulat Einsteina

Średnie natężenie promieniowania w linii określimy jako

$$\bar{J} = \int d\nu J_\nu \Phi_\nu \quad \text{gdzie} \quad 1 = \int d\nu \Phi_\nu. \quad (5.29)$$

Gdy widmo promieniowania w obszarze linii jest gładkie to $\bar{J} = J_\nu$. Niech ośrodek zawiera w jednostce objętości n_1 atomów w stanie niższym i n_2 atomów w stanie wyższym i niech średnie natężenie promieniowania w linii odpowiadającej przejściu $1 \rightarrow 2$ jest \bar{J} . Wówczas zgodnie z postulatem Einsteina mogą zachodzić trzy rodzaje oddziaływań między materią i promieniowaniem: absorpcja, emisja spontaniczna i emisja wymuszona. Ten ostatni proces był istotną nowością w postulacie Einsteina. Jego rolę wyjaśnimy później. Według tego postulatu w tych warunkach zachodzą następujące ilości przejść atomowych na jednostkę czasu i objętości:

$$n_1 B_{12} \bar{J} \quad 1 \rightarrow 2 \quad \text{absorpcja} \quad (5.30)$$

$$n_2 B_{21} \bar{J} \quad 2 \rightarrow 1 \quad \text{emisja wymuszona} \quad (5.31)$$

$$n_2 A_{21} \quad 2 \rightarrow 1 \quad \text{emisja spontaniczna} \quad (5.32)$$

Przez A_{21} , B_{21} i B_{12} oznaczyliśmy stałe atomowe charakteryzujące dane przejście. Nazywa się je współczynnikami Einsteina.

Zależności Einsteina

Zbadamy jakie warunki dla współczynników Einsteina wypływają z zachowania materii i promieniowania w RT. Wówczas promieniowanie ma widmo Plancka, poziomy są obsadzone zgodnie z rozkładem Boltzmanna a emisja i absorpcja posostają w równowadze szczegółowej.

$$\bar{J} = J_\nu = B_\nu = 2 \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} \quad \text{R. Plancka} \quad (5.33)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_0}{kT}} \quad \text{R. Boltzmanna} \quad (5.34)$$

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J} \quad \text{R. szczegółowa} \quad (5.35)$$

Rozwiązując (5.35) ze względu na \bar{J} i podstawiając (5.34) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}} - 1} = \\ &= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Teraz można dostrzec sens postulatu Einsteina. Przy braku emisji wymuszonej, czyli przy $B_{21} = 0$ nie sposób uzyskać różnicy dwu wyrazów w mianowniku (5.36). Emisja wymuszona jest niezbędna do otrzymania zapewnienia zgodności \bar{J} z równowagi szczegółowej z rozkładem Plancka w RT. Dalej, z porównania (5.33) i (5.36) wynika, że dla takiej zgodności współczynniki Einsteina muszą spełniać donatkowe zależności Einsteina:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (5.37)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = 2 \left(\frac{\nu_0}{c}\right)^2 h\nu_0 \quad (5.38)$$

Wartości współczynników Einsteina jako stałych atomowych nie zależą od stanu RT, zatem zależności Einsteina muszą być spełnione zawsze.

5.2.5 Atom 2-poziomowy

5.2.6 Redystrybucja fotonów

Wzory (5.30) – (5.32) określają ilość przejść. Aby otrzymać z nich współczynnik absorpcji i emisji należy wkonać dwa zabiegi. Po pierwsze fotony nie są znaczone, zatem w równaniu transferu nie jesteśmy w stanie odróżnić fotonu nie pochłoniętego od fotonu wyemitowanego na drodze emisji wymuszonej: ilość

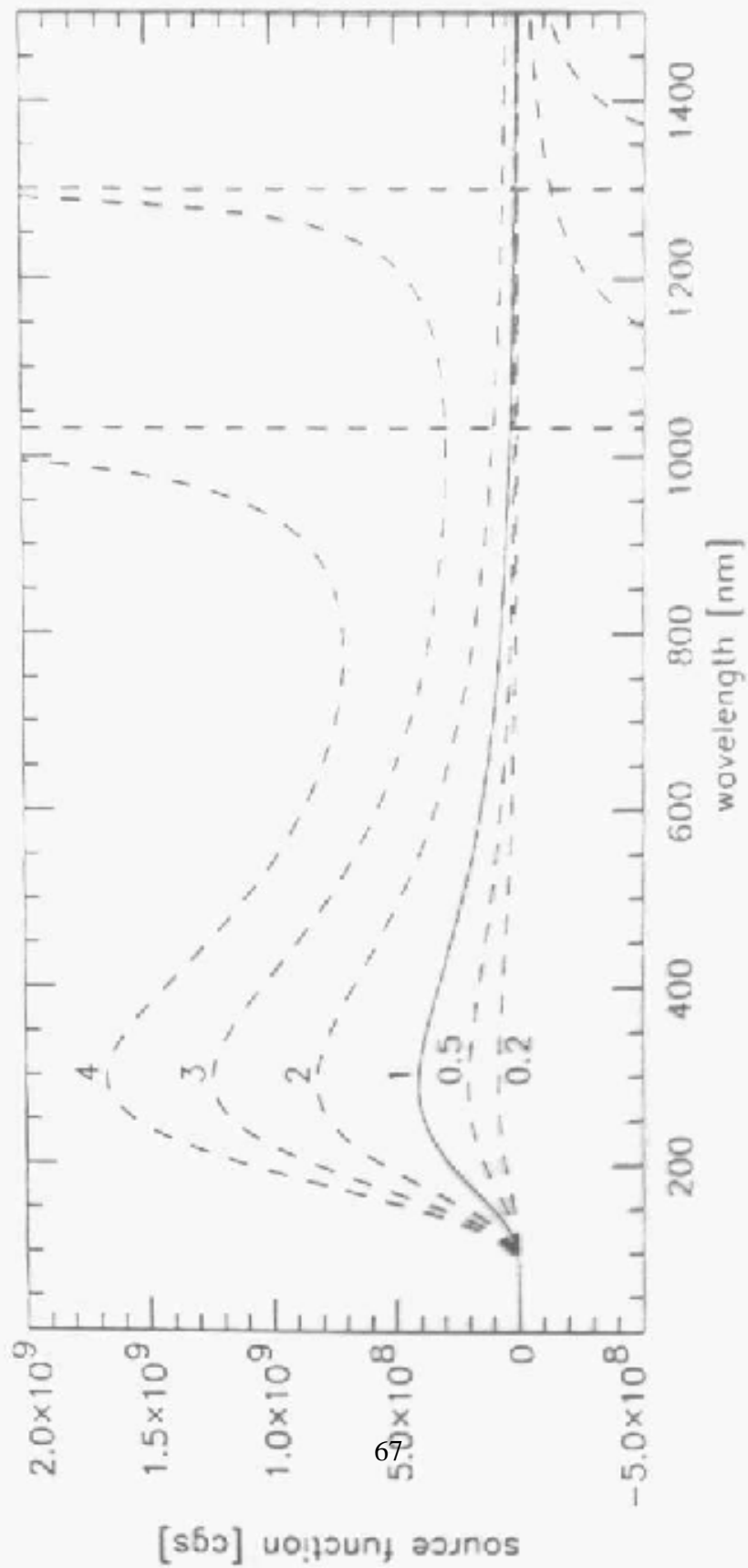


Diagram 5.5: Width of field in star 2 region versus parameter value

obu będzie proporcjonalna do \bar{J} . Z tego względu absorpcja i emisja wymuszona daje łączny wkład do współczynnika pochłaniania κ . Po drugie należy wprowadzić czynnik $h\nu_0\Phi(\nu)/4\pi$ aby z całkowitej ilości reakcji otrzymać energię promieniowania biegnącego w jednostkowym kącie bryłowym i w konkretnej częstotliwości, jak to jest w definicji I , κ oraz η :

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi}(n_1B_{12} - n_2B_{21})\Phi_\kappa(\nu) \quad (5.39)$$

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi}n_2A_{21}\Phi_\eta(\nu) \quad (5.40)$$

Nie jest przy tym oczywiste jakich profili linii Φ_κ i Φ_η należy użyć w obu zależnościach. Jeśli pomiędzy absorpcją fotonu a jego re-emisją mija tak wiele czasu, że atom zdążył już zapomnieć o wyjściowych warunkach, to oba profile będą identyczne, odpowiadające rozkładowi wszystkich atomów. W przeciwnym wypadku w emisji (Φ_η) względem absorpcji będzie deficyt fotonów w tych częściach profilu gdzie współczynnik absorpcji jest duży, ale brakowało fotonów do pochłonięcia. Z tego względu mówimy o całkowitej i częściowej redystrybucji fotonów (TRD i PRD):

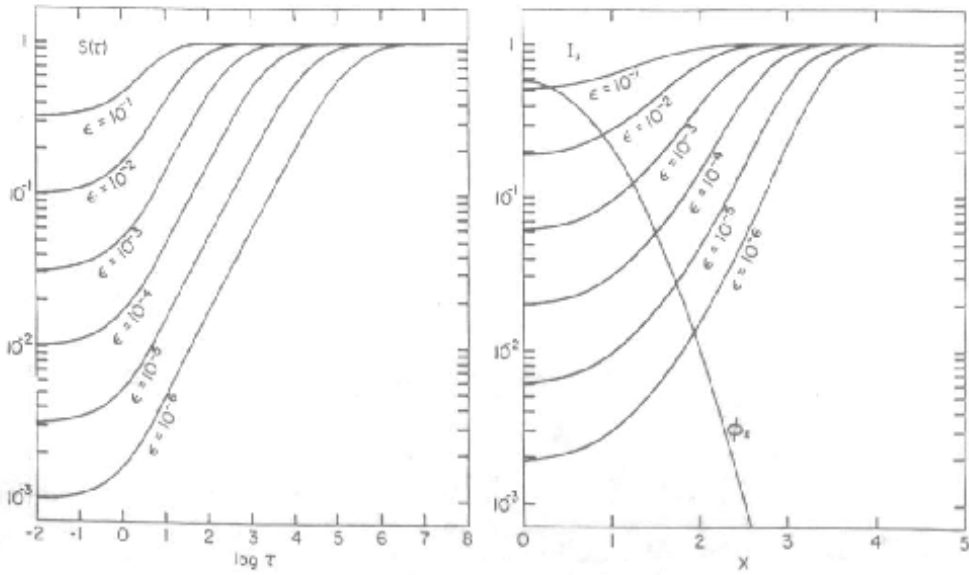
$$\begin{aligned} \Phi_\kappa \neq \Phi_\eta & \text{ częściowa RD (PRD) } & \text{ b.silne linie rezonansowe} \\ \Phi_\kappa = \Phi_\eta & \text{ całkowita RD (TRD) } & \text{ pozostałe linie} \end{aligned}$$

O zapominaniu stanu przez atomy w tym przypadku decyduje stosunek czasu życia atomu w stanie wzbudzonym $n_2/n_2A_{21} = 1/A_{21}$ oraz czas pomiędzy luźnymi spotkaniami atomów w których oddziaływanie jest tak słabe, że zaledwie wystarczy na zmianę energii atomu w ramach profilu linii. O takie luźne spotkania łatwo z wyjątkiem bardzo rzadkich najwyższych warstw atmosfery, gdzie właśnie powstają najsilniejsze linie, o małych ($1/A_{21}$).

5.2.7 Funkcja źródłowa

W NLTE nie możemy korzystać z prawa Boltzmanna dla obsadzeń poziomów w atomach $n_i|_{LTE}$. Wartości obsadzeń n_i trzeba wyliczać wprost z warunku równowagi statystycznej pomiędzy ilością wzbudzeń i powrotów. W dalszym ciągu jednak wygodnie jest traktować stan LTE jako odniesienie, zatem wprowadzimy parametry obsadzenia *względem LTE*: $b_i \equiv n_i/n_i|_{LTE}$. Skorzystamy teraz z definicji i przedstawimy S_ν w nowych oznaczeniach (por. rys. 5.5):

$$\begin{aligned} S_\nu^K &= \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{n_2A_{21}}{n_1B_{12} - n_2B_{21}} \\ &= 2 \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \frac{h\nu}{\frac{b_1}{b_2} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{TRD}) \end{aligned} \quad (5.41)$$



Rysunek 5.6: Powstawanie linii atomu 2-poziomowego w izotermicznej w atmosferze NLTE. Prawy panel przedstawia przebieg f. źródłowej a prawy widmo natężenia oraz Dopplerowski profil absorpcji Φ , w zależności od parametru rozpraszania ϵ .

Oznaczając ilość przejść promienistych i zderzeniowych pomiędzy poziomami i oraz j odpowiednio przez R_{ij} i C_{ij} warunek równowagi statystycznej można przedstawić jako

$$n_1(R_{12} + C_{12}) = n_2(R_{21} + C_{21}) \quad \text{gdzie} \quad (5.42)$$

$$R_{12} = B_{12}\bar{J} \quad (5.43)$$

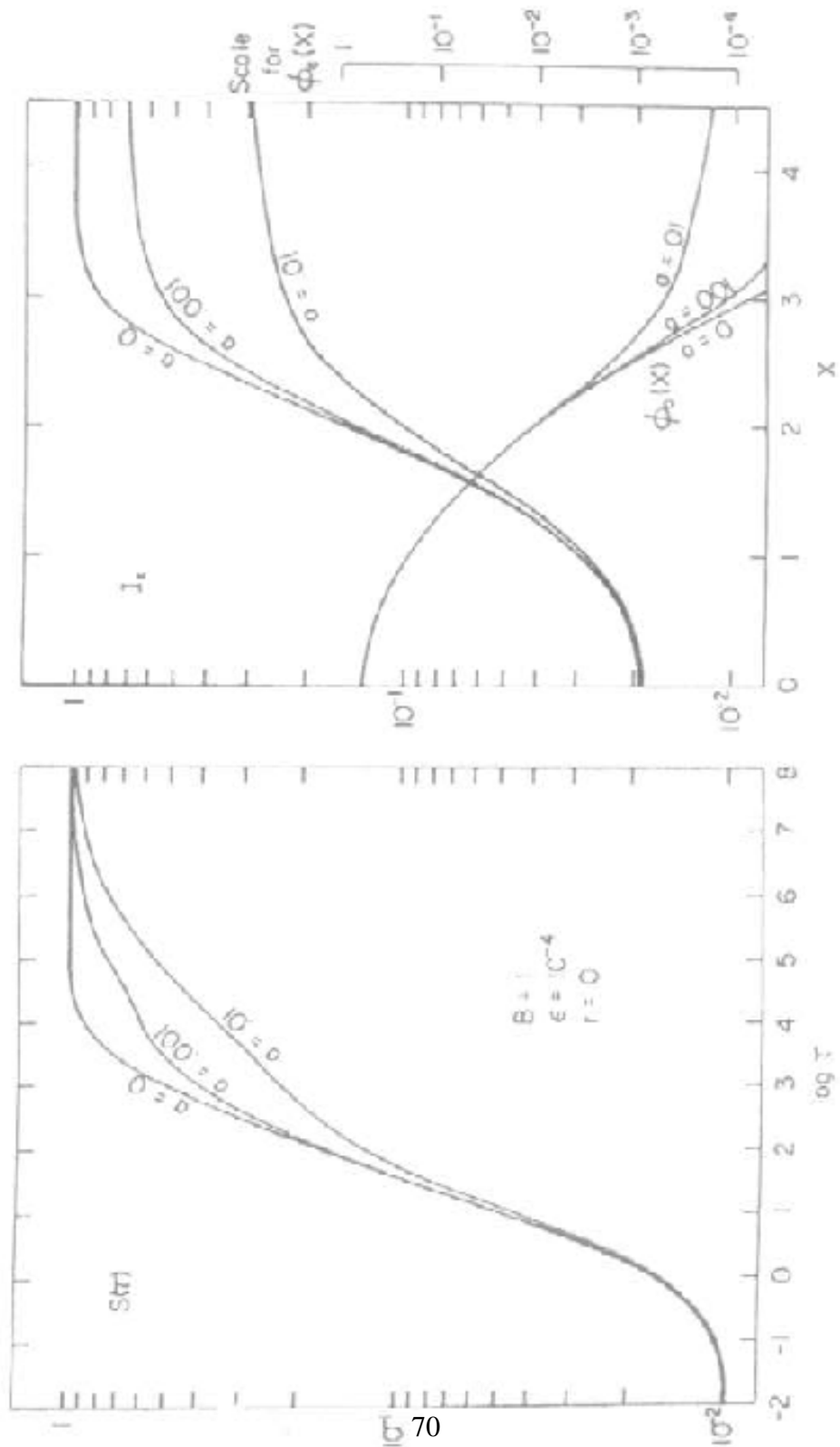
$$R_{21} = A_{21} + B_{21}\bar{J} \quad (5.44)$$

Przy takich oznaczeniach i założeniach S_ν w linii daje się przedstawić w postaci

$$S_\nu^L = (1 - \epsilon)\bar{J} + \epsilon B_\nu \quad \text{gdzie} \quad (5.45)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} \quad (5.46)$$

$$\epsilon' = \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \quad (5.47)$$



Rysunek 5.7: To samo co na rys. 5.6 ale dla linii o profilu Voigta

W LTE funkcja źródłowa $S_\nu = B_\nu$ nie zależała bezpośrednio od pola promieniowania J_ν . Były one związane pośrednio poprzez T i założenie równowagi promienistej, zatem sprzężenie promieniowania z matryą miało charakter lokalny. Atom 2-poziomowy stanowi najprostszy przykład powstawania linii widmowych w NLRT. Poprzez człon z \bar{J} funkcja źródłowa atomu 2-poziomowego uwzględnia w sposób bezpośredni nielocalne sprzężenie materii z promieniowaniem innych warstw. W tym sensie model atomu 2-poziomowego jest bardziej realistyczny niż założenie LTE. Idealizacja polega na liniowości związku S_ν oraz J_ν . Taka postać opiera się na założeniu, że przejścia na inne poziomy nie mają wpływu na obsadzenie 1 i 2. Istotnie, uwzględniając wiele poziomów i przejść ij mamy $S_{\nu ij} = (1 - \epsilon_{ij})\bar{J}_{ij} + \eta_{ij}$ gdzie same ϵ_{ij} i η_{ij} też zależą od \bar{J} poprzez obsadzenie innych poziomów. W ten sposób $S_{\nu ij}(\bar{J})$ staje się zależnością nieliniową.

Na rysunkach 5.6 i 5.7 przedstawiamy przebieg f. źródłowej i widma linii obliczone dla modelu atomu 2-poziomowego w NLTE. Proszę zwrócić uwagę na znaczną głębość optyczną na której S_ν różni się od wartości 1 dla LTE.

5.2.8 Dowód postaci S_ν^L

Dowód wzoru (5.45), czyli $S_\nu^L = S_\nu^K$ jest nieco pracochłonny. Po drodze będziemy korzystać z następujących warunków wynikających z równowagi detalicznej w RT, a słusznych ogólnie na mocy niezależności współczynników reakcji od RT:

$$B_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5.48)$$

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2} \quad (5.49)$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{B_{21}}{B_{12}} e^{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{C_{21}}{C_{12}} \quad (5.50)$$

$$(5.51)$$

W oparciu o te zależności i definicję (5.44) otrzymujemy

$$A_{21}\epsilon' = C_{21}e^{-\frac{h\nu}{kT}}(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) = \mathcal{C}_{21} \frac{C_{12}}{\mathcal{C}_{21}} \frac{B_{21}}{B_{12}} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) \quad (5.52)$$

Zacznijmy od przekształcenia (5.41), podstawiając (5.42):

$$\begin{aligned} S_\nu^K &= \frac{A_{21}}{\frac{n_1}{n_2} B_{12} - B_{21}} = \frac{A_{21}}{\frac{R_{21} + C_{21}}{R_{12} + C_{12}} B_{12} - B_{21}} \\ &= \frac{A_{21}(R_{12} + C_{12})}{B_{12}(R_{21} + C_{21}) - B_{21}(R_{12} + C_{12})} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Teraz sprowadzimy (5.45) do postaci (5.53) kolejno podatawając (5.46) i (5.47).

$$\begin{aligned} S_\nu^L &= \frac{1\bar{J} + \epsilon' B_\nu}{1 + \epsilon'} = \frac{A_{21}\bar{J} + A_{21}\epsilon' B_\nu}{A_{21} + A_{21}\epsilon'} \\ &= \frac{A_{21}\frac{R_{12}}{B_{12}} + C_{12}\frac{B_{21}A_{21}}{B_{12}B_{21}}}{A_{21} + C_{21} - \cancel{C}_{21}\frac{C_{12}B_{21}}{\cancel{C}_{21}B_{12}}} \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy kolejno z (5.43), (5.52), (5.48) i (5.47). Przekształcając dalej otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_\nu^L &= \frac{A_{21}(R_{12} + C_{12})}{B_{12}(A_{21} + C_{21}) - B_{12}C_{12}} \\ &= \frac{A_{21}(R_{12} + C_{12})}{B_{12}(R_{21} + C_{21}) - B_{12}B_{21}\bar{J} - B_{12}C_{12}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

gdzie w mianowniku ostatniej równości korzystamy z (5.44). Teraz widać, że wyrażenia (5.53) i (5.54) mają identyczną wartość, co kończy dowód równości wyrażen (5.41) i (5.45).

5.3 Proste modele linii widmowych LRT

5.3.1 Linie Rozpraszające: Model Schustera-Schwarzschilda

Model Schustera-Schwarzschilda (S-S) zakłada, że nad gorącą fotosferą znajduje się zimna warstwa wyłącznie rozpraszająca fotony w linii $S_\nu = (1 - \epsilon)J_\nu + \epsilon B_\nu$ gdzie $\epsilon = 1$. Przy tym rozpraszanie nie ma wpływu na strukturę tej warstwy. W tym przypadku r. transferu piszemy jako

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - J_\nu \quad (5.55)$$

gdzie $d\tau_\nu = \sigma_\nu \rho dz$. Bezpośrednio z postaci równania widać, że nie ma wymiany energii pomiędzy różnymi częstotściami, bo wszystkie wyrazy w równaniu zależą tylko od jednej częstotści ν . Zatem, podobnie jak w atmosferze szarej obowiązuje warunek równowagi promienistej

$$F_\nu(\tau_\nu) = \text{const} \quad (5.56)$$

Dla odmiany zamiast przybliżenia Eddingtona zastosujemy przybliżenie dwu promieni dla $\mu = \pm 1/\sqrt{3}$. Z rozwiązania Chandrasekhara mamy

$$I_\pm(\tau_\nu) = \frac{3}{4}F_\nu \left(\tau_\nu \pm \frac{1}{\sqrt{3}} + Q \right) \quad (5.57)$$

Przyjmując warunek brzegowy na powierzchni $I_-(0) = 0$ otrzymujemy $Q = 1/\sqrt{3}$. W ten sposób rozwiązanie przyjmuje postać

$$I_+(\tau_\nu) = \frac{3}{4}F_\nu \left(\tau_\nu + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad (5.58)$$

$$I_-(\tau_\nu) = \frac{3}{4}F_\nu \tau_\nu \quad (5.59)$$

Jako wewnętrzny warunek brzegowy dla warstwy o grubości τ_0 oświetlanej strumieniem kontinuum F_c mamy

$$I_+(\tau_0) \equiv \frac{3}{4}F_\nu \left(\tau_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3}{4}F_c \left(0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad (5.60)$$

Założyliśmy, że pochłanianie warstwy w kontinuum można zaniedbać. Stąd mamy widmo F_ν/F_c . Teraz J_ν znajdujemy z przybliżenia dwu promieni: $J_\nu = (1/2)(I_+ + I_-)$

$$\frac{F_\nu}{F_c} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}\tau_0}{2}} \quad (5.61)$$

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}[I_+(\tau_\nu) + I_-(\tau_\nu)] = \frac{3}{4}\left(\tau_\nu + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (5.62)$$

Wartości I_ν dla dowolnych μ znajdziemy podstawiając $S_\nu = J_\nu$ do rozwiązania formalnego:

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^{\tau_0} J_\nu(t_\nu) e^{-\frac{t_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu} + I_c(0, \mu) e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} \quad (5.63)$$

Wykonując całkowanie otrzymujemy wynik w dosyć nieprzejrzystej formie:

$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} = \frac{3F_c}{4I_c(0, \mu)} \frac{\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} - (\mu + \tau_0 + \frac{1}{\sqrt{3}})e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}}{1 + \frac{\sqrt{3}\tau_0}{2}} + e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} \quad (5.64)$$

Bardziej przejrzyste wyniki otrzymamy badając zachowanie graniczne dla b.słabych i b.silnych linii:

$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} \rightarrow \begin{cases} 1 - \tau_0 \frac{3F_c}{4I_c(0, \mu)} & \tau_0 \ll 1 \quad \text{słaba linia} \\ \frac{\sqrt{3}F_c}{2I_c(0, \mu)} \frac{\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\tau_0} & \tau_0 \gg 1 \quad \text{silna linia} \end{cases} \quad (5.65)$$

Ten wynik przewiduje słabą zależność natężenia linii od kąta czyli małe pocienienie brzegowe. Jest to w niezgodzie z zachowaniem większości linii za tarczy słonecznej. Na tej podstawie można wnioskować, że większość linii powstaje wskutek rzeczywistego pochłaniania a nie rozpraszania.

5.3.2 Linie Pochłaniające: Model Milne -Eddingtona

W modelu Milne-Eddingtona zakładamy brak rozpraszania w kontinuum $\sigma = 0$ i stałość z głębokością t pozostałych współczynników absorpcji: w kontinuum κ i w linii σ_ν i κ_ν . Brak rozpraszania jest najsilniejszym ograniczeniem modelu. Zakładamy też liniową zależność funkcji źródłowej od t :

$$B(t) = a + bt \quad (5.66)$$

W świetle wyników przybliżenia Eddingtona, to ostatnie założenie jest dość realistyczne. Równanie transferu dla promieniowania w kontinuum przyjmuje postać:

$$\mu \frac{dI_c}{dt} = I_\nu - B_\nu \quad \text{gdzie} \quad dt = -\kappa \rho dz \quad (5.67)$$

W linii mamy

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \mathcal{L}_\nu B_\nu - (1 - \mathcal{L}_\nu) J_\nu \quad \text{gdzie} \quad (5.68)$$

$$d\tau_\nu = -(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu) \rho dz \quad (5.69)$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.70)$$

$$\eta_\nu = \frac{\kappa_\nu + \sigma_\nu}{\kappa} \quad (5.71)$$

$$\mathcal{L}_\nu = \frac{\kappa_\nu + \kappa}{\kappa_\nu + \kappa_\nu + \sigma_\nu} = \frac{1 + \eta_\nu \varepsilon_\nu}{1 + \eta_\nu} \quad (5.72)$$

Rozwiązania szukamy w oparciu o przybliżenie Eddingtona. Zaczynamy w zwykły sposób licząc momenty r. transferu:

$$\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = 4\mathcal{L}_\nu(J_\nu - B_\nu) \quad \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu}{4} \quad K_\nu = \frac{J_\nu}{3} \quad (5.73)$$

Różniczkując i podstawiając otrzymujemy:

$$\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = 3\mathcal{L}_\nu(J_\nu - B_\nu) \quad (5.74)$$

Związek skal głębokości w linii i w kontinuum można wyrazić jako $dt/\kappa = -\rho dz = d\tau_\nu/(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu)$. Stąd otrzymujemy t i $B(t)$ jako

$$t = \frac{\tau_\nu}{1 + \eta_\nu}$$

$$B_\nu(\tau_\nu) = B(t) = a + \frac{b\tau_\nu}{1 + \eta_\nu} \quad (5.75)$$

Wobec poczynionych założeń, równanie (5.74) jest równaniem liniowym. Jego rozwiązanie ogólne można przedstawić jako

$$J_\nu - B_\nu = C_1 e^{+\sqrt{3}\mathcal{L}\tau_\nu} + C_2 e^{-\sqrt{3}\mathcal{L}\tau_\nu} \quad (5.76)$$

Podstawiając wewnętrzny warunek brzegowy $J_\nu - B_\nu \rightarrow 0$ gdy $\tau \rightarrow \infty$ Stąd $C_1 = 0$. Aby wyznaczyć C_2 policzymy wartość $dJ_\nu/d\tau_\nu$ na powierzchni dwa sposoby.

$$\frac{1}{3} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} \Big|_0 = \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} \Big|_0 = \frac{F_\nu(0)}{4} = \frac{J_\nu(0)}{2} = \frac{C_2 + a}{2} \quad (5.77)$$

Skorzystalismy z wyniku dla atmosfery pół-nieskończonej $F_\nu(0) = 2J_\nu(0)$. Natomiast bezpośrednio różniczkując rozwiązanie otrzymujemy

$$\frac{1}{3} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} \Big|_0 = -\sqrt{3\mathcal{L}_\nu} C_2 + \frac{b}{1 + \eta_\nu} \quad (5.78)$$

Porównując otrzymujemy

$$C_2 = \frac{\frac{b}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}} - \frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\mathcal{L}_\nu} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.79)$$

Wynik przybliżenia dwu strumieni różni się od powyższego w nieistotnych szczegółach co potwierdza wiarygodność wyniku.

Podstawiając $\eta_\nu = 0$ i $\mathcal{L}_\nu = 1$ otrzymujemy wyniki dla kontinuum:

$$J_c(0) = \frac{a + \frac{b}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (5.80)$$

Unormowane rozwiązanie przyjmuje postać

$$\frac{F_\nu(0)}{F_c(0)} \approx \frac{J_\nu(0)}{J_c(0)} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3} + b} \frac{a\sqrt{3\mathcal{L}_\nu} + \frac{b}{1+\eta_\nu}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\mathcal{L}_\nu}} \quad (5.81)$$

W oparciu o to rozwiązanie możemy otrzymać funkcje źródłowe jako

$$S_\nu = \mathcal{L}_\nu B_\nu - (1 - \mathcal{L}_\nu) J_\nu \quad (5.82)$$

$$S_c(t) = B_\nu(t) \quad (5.83)$$

Podstawiając do rozwiązania formalnego otrzymamy jako wynik, pomijając przekształcenia:

$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} = \frac{a + \frac{b\mu}{1+\eta_\nu}}{a + b\mu} - \frac{(1 - \mathcal{L}_\nu) \left[\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}} \right]}{(a + b\mu)(1 + \mu\sqrt{3\mathcal{L}_\nu}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\mathcal{L}_\nu} \right)} \quad (5.84)$$

Ponieważ w modelu S-S rozpatrywaliśmy przypadek czystego rozpraszania obecnie rozpatrzmy przypadek czystego pochłaniania $\varepsilon = \mathcal{L} = 1$. Wynik przyjmuje bardziej strawną postać

$$\frac{F_\nu(0)}{F_c(0)} = \frac{a\sqrt{3} + \frac{b}{1+\eta_\nu}}{a\sqrt{3} + b} \quad (5.85)$$

$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} = \frac{a + \frac{b\mu}{1+\eta_\nu}}{a + b\mu} \quad (5.86)$$

Widać, że gdy atmosfera jest izotermiczna czyli brak gradientu temperatury $b = 0$, to brak jest linii. Inaczej warunkiem powstawania linii jest spadek temperatury w atmosferze na zewnątrz. Dla silnych linii, $\eta_\nu \gg 1$ mamy

$$\frac{F_\nu(0)}{F_c(0)} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + b} \quad (5.87)$$

$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} = \frac{a}{a + b\mu} \quad (5.88)$$

Stąd wniosek, że na brzegu tarczy absorpcja nie daje linii. W istocie wówczas patrzmy wzdłuż warstwy gazu o stałej temperaturze. Dla słabych linii, $\eta_\nu \ll 1$ mamy

$$\frac{F_\nu(0)}{F_c(0)} = 1 - \frac{\eta_\nu b}{a\sqrt{3} + b} \quad (5.89)$$

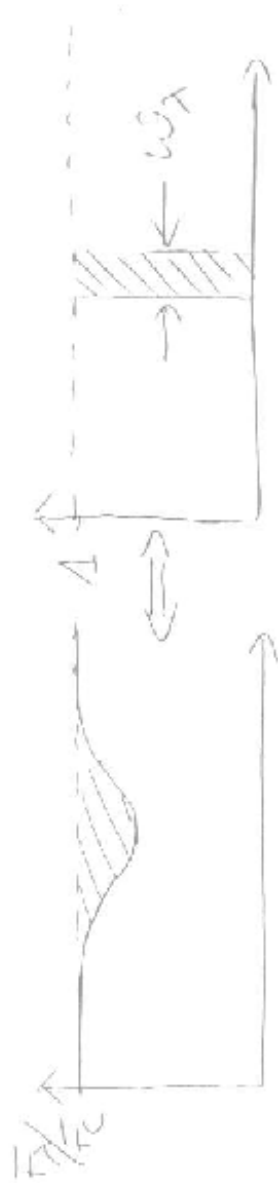
$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_c(0, \mu)} = 1 - \frac{\eta_\nu b\mu}{a + b\mu} \quad (5.90)$$

W tym wypadku głębokości linii $\sim \eta_\nu \sim \kappa_\nu \sim n_i$ gdzie N_i jest gęstością kolumnową pochłabiających atomów.

5.3.3 Krzywa wzrostu

Przedstawimy teraz szkic metody wyznaczania składu chemicznego gwiazd w oparciu o teorię atmosfer. W tym celu oprzemy się o najprostszy i niezbyt realistyczny model S-S. Zasada metody pozostaje słuszna dla bardziej realistycznych modeli powstawania linii w atmosferze, w szczególności można ją stosować w oparciu o rachunki syntetycznych widm. W celu wygodnego porównania natężeń obserwowanych i obliczonych linii jest potrzebna jakaś miara. Taką miarą jest szerokość równoważna W_λ określona jako szerokość prostokątnej linii o głębokości 100% która wycina z kontinuum takie same pole jak dana linia (Rys. 5.8):

$$W_\lambda \cdot 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{F_\lambda}{F_c}\right) d\lambda \quad (5.91)$$



Rysunek 5.8: Określenie szerokości równoważnej linii.

Grubość optyczna w linii

Wygodnie jest tutaj posługiwać się wielkościami liczymy na jednostkowy przedział λ a nie ν . Mając związek $\lambda\nu = c$ z warunku $F_\nu d\nu = F_\lambda d\lambda$ mamy $F_\lambda = F_\nu |d\nu/d\lambda| = F_\nu c/\lambda^2$ i podobnie dla κ_λ . Grubość optyczna w linii wynosi

$$\tau_\lambda = \int_0^H \kappa_\lambda \rho dz = \frac{c}{\lambda^2} \int_0^H \mathcal{K}_\nu \rho dz \quad (5.92)$$

gdzie przez $\mathcal{K}_\nu = \kappa_\nu \rho$ oznaczyliśmy nieprzezroczystość na jednostkę objętości. Podstawiając (5.39) otrzymujemy

$$\tau_\lambda = \frac{ch\nu_0}{4\pi\lambda^2} B_{12} \Phi_\lambda \int_0^H n_1 dz = \frac{ch\nu_0}{4\pi\lambda^2} B_{12} N_1 \Phi_\lambda \quad (5.93)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie gęstości kolumnowej $N_1 = \int_0^H n_1 dz$. Dla uproszczenia zapisu oznaczymy $X = \frac{ch\nu_0}{4\pi\lambda^2} B_{12} N_1$. Wówczas

$$\tau_\lambda = X \Phi_\lambda \quad (5.94)$$

Krzywą wzrostu nazywamy zależność $W_\lambda(N_i)$ lub co wychodzi na jedno $W_\lambda(X)$. Nazwa odnosi się do wzrostu szerokości linii ze wzrostem zawartości odpowiednich atomów. Podstawiając znaną w modelu S-S wartość F_ν/F_c znajdujemy wyrażenie określające krzywą wzrostu

$$W_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_\lambda} \right) d\lambda = 2\Delta\lambda_D \int_0^\infty \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \tau_\lambda}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_\lambda} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda_D} \quad (5.95)$$

Podstawiając nową zmienną $dw = d\lambda/\Delta\lambda_D$ otrzymujemy

$$W_\lambda = \sqrt{3}\Delta\lambda_D \int_0^\infty \frac{\tau_w}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_w} dw \quad (5.96)$$

Przez $\Delta\lambda_D$ oznaczyliśmy szerokość profilu dopplera jądra linii. Dla typowego profilu Voigta w centrum Dopplerowskiego ze skrzydłami Lorentza przy rosnącym natężeniu mamy trzy różne przypadki wypełnienia linii, dodatkowo zilustrowane na rysunku 5.9:

$$W_\lambda \sim X \cdot \Delta\lambda_D \quad \text{słaba linia} \quad \text{jądro nie wypełnione} \quad (5.97)$$

$$W_\lambda \sim 1 \cdot \Delta\lambda^{(D)} \quad \text{średnia linia} \quad \text{skrzydła Dopplera wypełnione} \quad (5.98)$$

$$W_\lambda \sim 1 \cdot \Delta\lambda^{(L)} \quad \text{silna linia} \quad \text{skrzydła Lorentza wypełnione} \quad (5.99)$$

$$(5.100)$$

Przez $\Delta\lambda^{(D)}$ i $\Delta\lambda^{(L)}$ oznaczyliśmy szerokość na której odpowiednio skrzydła Dopplera lub Lorentza są nasycone.

Krzywa wzrostu

Rozważymy dokładniej 3 przypadki nasycenia linii. Dla słabej linii mianownik pod całką w (5.96) jest w przybliżeniu 1 i dla profilu Dopplera mamy

$$\begin{aligned}\tau_\lambda &\sim \frac{X}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \quad \text{gdzie } X \ll 1 \\ W_\lambda &\approx \sqrt{3} \Delta \lambda_D \int_0^\infty \tau_w dw = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \Delta \lambda_D X \int_0^\infty e^{-w^2} dw \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta \lambda_D X \sim N_i\end{aligned}\quad (5.101)$$

Dla linii o pośredniej intensywności szerokość wypełnienia profilu Dopplera $\Delta \lambda^{(D)} = w^{(D)} \Delta \lambda_D$ określamy z przyrównania wyrazów w mianowniku:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{X}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \quad \text{skąd} \\ w^{(D)} &= \sqrt{\ln \left(\sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{X}{2} \right)} \\ W_\lambda &\approx \sqrt{3} \Delta \lambda_D w^{(D)} = \sqrt{3} \Delta \lambda_D \sqrt{\ln \left(\sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{X}{2} \right)}\end{aligned}\quad (5.102)$$

Dla silnej linii postępujemy analogicznie, tylko używamy profilu Lorentza do określenia szerokości $\Delta \lambda^{(L)}$:

$$\begin{aligned}\tau_\lambda &\sim \frac{Xa}{\pi} \frac{1}{w^2 + a^2} \sim \frac{Xa}{\pi w^2} \quad \text{skąd} \\ 1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{Xa}{w^2} \\ w^{(L)} &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}} Xa \\ W_\lambda &\approx \sqrt{3} \Delta \lambda_D w^{(L)} = \sqrt{3} \Delta \lambda_D \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}} Xa\end{aligned}\quad (5.103)$$

W rezultacie znajdujemy, że krzywa wzrostu składa się z 3 odcinków, stromego $\sim N_i$ dla linii słabej, płaskiego dla średniej linii i umiarkowanie nachylonego dla linii silnej. Zastosowanie krzywej wzrostu do obserwacji polega na zmierzeniu $\log W_\lambda^O$ dla szeregu linii tego samego atomu o różnych natężeniach oraz na policzeniu dla nich przy założonym N_i wartości $\log X$ oraz $\log W_\lambda^C$. Odkładając



Rysunek 5.9: Kształt linii odpowiadający 3 częściom krzywej wzrostu

$\log W_\lambda$ w funkcji X otrzymamy dwie krzywe wzrostu: obserwowaną i teoretyczną. Ich wzajemne przesunięcie w poziomie określa odstępstwo obserwowanej zawartości od założonej $\Delta \log N_i$. Współcześnie dysponując zaawansowanymi modelami atmosfery nie ma potrzeby odwoływać się do modelu S-S w celu wyznaczenia składu chemicznego z natężeń linii. Niemniej zasada pozostaje ta sama: opieramy się na porównaniu obserwowanej i obliczonej krzywej wzrostu, lub co wychodzi prawie na jedno, staramy się wprost dopasować widmo teoretyczne do obserwowanego zmieniając zawartości poszczególnych atomów w atmosferze.

5.4 Proste modele linii widmowych LNRT

5.4.1 Operatorowa postać równania transferu

Okazuje się, że równanie transferu można przedstawić w postaci operatorowej - całkowej. Zakładając funkcję źródłową S atomu 2-poziomowego $S = (1 - \epsilon)J + \epsilon B$ i podstawiając (3.49) otrzymujemy równanie całkowe na S :

$$S(\tau) = (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \int_0^\infty S(t) E_1(|t - \tau|) dt + \epsilon B(\tau) \quad (5.104)$$

gdzie opuściliśmy indeksy ν . Jest to operatorowa postać równania transferu dla $S(\tau)$. Zaletą postaci operatorowej jest brak zależności od kątów, co prowadzi do bardziej skondensowanego obrazu problemu. Ta postać pozwala na snucie oszacowań i przybliżeń analitycznych. Do praktycznych obliczeń postać operatorowa się nie nadaje. W obliczeniach jesteśmy zmuszeni reprezentować atmosferę przez skończoną liczbę warstw i wówczas liczenie całek oznacza sumy po wszystkich warstwach podczas gdy do przedstawienia różniczek wystarczy iloraz różnicowy obejmujący 2 najbliższe warstwy.

W przypadku transferu w linii, g"dzie wkład do J dają wszystkie częstości w obrębie linii, potrzebne jest dodatkowe całkowanie po profilu linii. Mamy wówczas

$$S(\tau) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty S(t) K_1(|t - \tau|) dt + \epsilon B(\tau) \quad \text{gdzie} \quad (5.105)$$

$$K_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi_x^2 E_1(\Phi_x s) dx \quad (5.106)$$

5.4.2 Ucieczka fotonów z centrum linii

Interpretacja fizyczna funkcji źródłowej atomu 2-poziomowego opiera się na stwierdzeniu, że z prawdopodobieństwem $1 - \epsilon$ foton zostaje efektywnie rozpraszony. Termin efektywnie obejmuje zarówno prawdziwe rozpraszanie jak i reemisję wcześniej

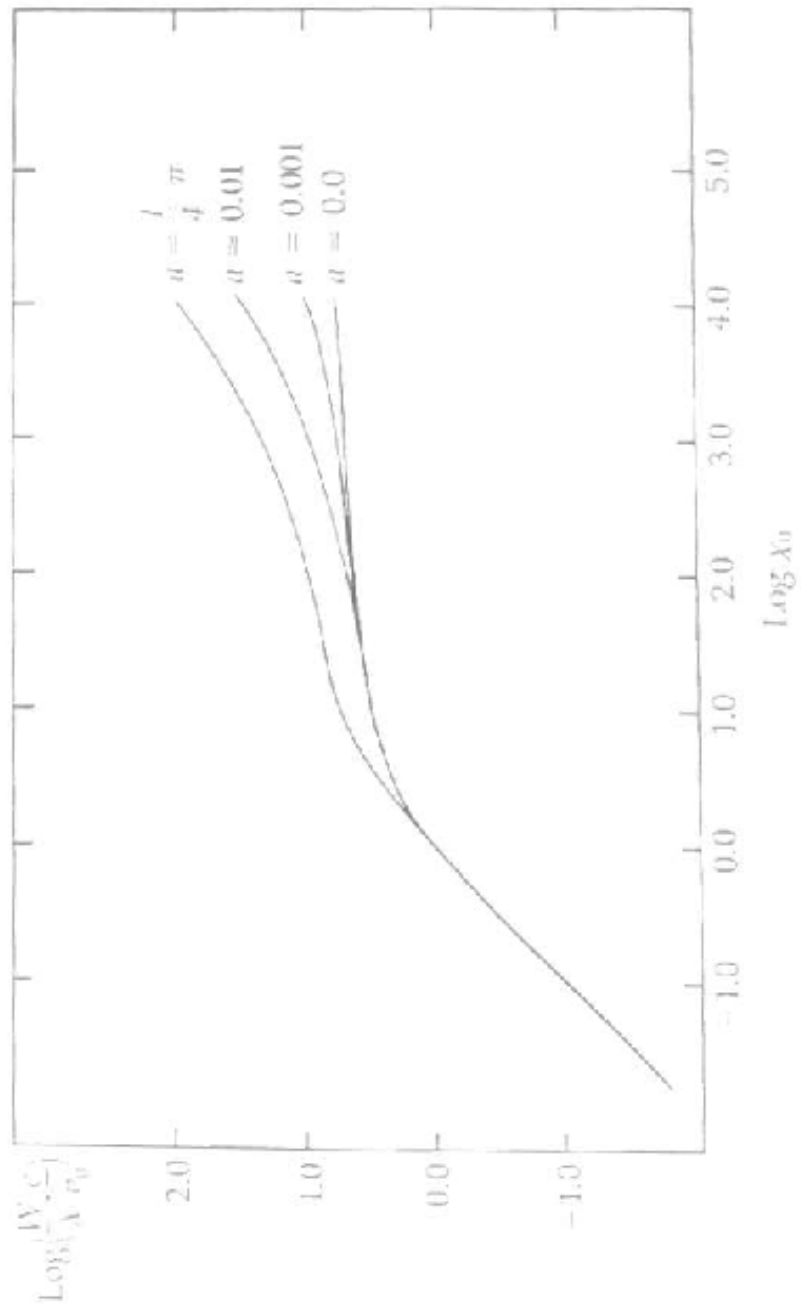


Figure 14.7 Curve of growth for the classical Schuster-Schwarzschild model atmosphere.

Rysunek 5.10: Krzywa wzrostu dla modelu Schwarzschilda-Schustera

pochłoniętego fotonu. Parametr ϵ można interpretować jako prawdopodobieństwo zniszczenia fotonu. Procesem który prowadzi do zniszczenia fotonu w linii jest powrót atomu do stanu wyjściowego wskutek nieelastycznego zderzenia. Takie zderzenie w którym energia wzbudzenia zostaje zamieniona na dodatkową energię kinetyczną cząstek nazywa się zderzeniem superelastycznym a cały proces określamy jako deekscytację zderzeniową. Dla przypadku silnych linii rezonansowych powstających w ultrafiolecie $h\nu/kT \gg 1$, w granicy $\epsilon \rightarrow C_{21}/(C_{21} + A_{21})$. Dla silnych linii rezonansowych, t.j. takich dla których dolny poziom jest poziomem podstawowym atomu, $\epsilon \leq 10^{-6}$.

Zniszczenia fotonu możemy się spodziewać po $N \sim 1/\epsilon$ kolejnych rozproszeń. Tyle rozproszeń wypada średnio na jedną deekscytację zderzeniową. Ruch fotonu w czasie rozproszeń można określić jako błądzenie przypadkowe: kolejne kroki są z grubsza jednakowe $\Delta\tau = 1$ i wypadają losowo w górę lub w dół. Odnosi się to zarówno do fotonów pozostających w centrum linii jak i do fotonów w kontinuum, inny jest tylko krok (znacznie dłuższy w kontinuum). Zatem zasięg fotonu przed zniszczeniem jest około $\tau_0 \sim \sqrt{N} \sim 1/\sqrt{\epsilon}$. Inaczej, fotony z warstw płytszych, $\tau < \tau_0$ mają duże szanse ucieczki.

Rozważmy równowagę promienistą w nad-fotosferycznej warstwie atmosfery pomiędzy $\tau = 0$ oraz $\tau = 1$, w warunkach silnego rozpraszania $\epsilon \ll 1$. W warunkach NLTE obsadzenie stanu podstawowego ulega niewielkiemu wzbogaceniu, wyraźny jest natomiast deficyt obsadzenia stanów wzbudzonych. Wydajność absorpcji pozostaje z grubsza jak w LTE: κ_ν . Natomiast spada ilość emisji, bowiem warstwa emitująca uciekające fotony, jest rozmyta na grubości τ_0 , zatem $\eta \sim B/\tau_0$. Mamy zatem oszacowanie S_ν na powierzchni w centrum linii:

$$S_\nu|_{\tau=0} = \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu} \sim \frac{B}{\tau_0} \sim \sqrt{\epsilon}B \quad (5.107)$$

To przybliżenie bardzo dobrze oddaje zachowanie ię f.źródłowej w centrum linii w modelach NLTE przedstawionych na rys. 5.6 i 5.7.

5.4.3 Ucieczka fotonów w skrzydła linii

Transport fotonów w skrzydłach linii odbywa się inaczej. Foton który w kolejnym rozproszeniu przypadkowo trafił do skrzydła, ma szansę przelecieć dużą odległość w jednym kroku, bo tam absorpcja jest mała. Natomiast następne kroki będą już b. krótkie bo wskutek redystrybucji foton trafia z powrotem do centrum linii. Zatem zasięg fotonów w skrzydle można przybliżyć podając długość jednego kroku. W przypadku skrzydeł linii musimy osobno rozpatrzeć przypadek skrzydeł profili Dopplera i Lorentza. Prawdopodobieństwo znalezienia się fotonu w skrzydle, n.p. dla $y > w$ gdzie $w = \Delta\omega/\Delta\omega_D$ można określić jako całkę Q z ogona rozkładu linii $1 - P = Q = \int_w^\infty \Phi_w dw$. By trafić do skrzydła foton musi ulec $N \sim$

$1/Q$ rozproszeniom. Skoro foton znajdzie się w skrzydle, jego zasięg odpowiada drodze swobodnej τ_1 gdzie $1 \sim \tau_1 \Phi(w)$. Te wyniki zestawimy w tabelce:

Wielkość	Doppler	Lorentz/Voigt
Prawdop. w skrzydle:		
$\frac{1}{N} \sim \epsilon \sim Q$	e^{-w^2}	$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{w}{a}}{\pi} \sim \frac{a}{w}$
Pochł. w skrzydle:		
Φ_w	$e^{-w^2} \sim \epsilon$	$\frac{a}{w^2} \sim \frac{\epsilon^2}{a}$
Zasięg w skrzydle:		
$\tau_1 \sim \frac{1}{\Phi_w}$	$\frac{1}{\epsilon}$	$\frac{a}{\epsilon^2}$

(5.108)

Na tej podstawie można stwierdzić, że ze względu na intensywną ucieczkę fotonów w skrzydle, dopóki $\tau < \tau_1$, w NLTE mamy deficyt emisji, czyli

$$S_\nu|_{\tau < \tau_1} \ll B_\nu \quad (5.109)$$

W szczególności w modelach NLTE przedstawionych na rys. 5.6 można stwierdzić odchylenia od LRT na głębokości zasięgu w skrzydle przy profilu Dopplera $1/\epsilon$. Podobnie rzeczy się mają na rys 5.7 dla profilu Voigta.

5.4.4 Głębokość termalizacji

Powyższe rozważania można nieco zformalizować wprowadzając pojęcia prawdopodobieństwa ucieczki $P_\nu(\mu) = e^{-\tau_\nu/\mu}$, dla $\mu > 0$. Interesująca jest jego wartość uśredniona po kątach oraz po częstości

$$P_\nu = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} d\mu = \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) \quad (5.110)$$

$$P_e(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x P_x(\tau_x) dx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x E_2(\tau \Phi_x) dx \quad (5.111)$$

Na powierzchni $E_2(0) = 1$ zatem $P_e(0) = 1/2$ jak się należało spodziewać, bo połowa fotonów jest emitowana do środka i grzeźnie.

W oparciu o prawdopodobieństwo ucieczki definiujemy głębokość termalizacji τ_{th} jako rozwiązanie równania

$$P_e(\tau_{th}) = \epsilon \quad (5.112)$$

Jeśli foton startuje z głębokości większej niż τ_{th} to ma większe szanse ulec zniszczeniu niż ucieczki. Zatem w tej warstwie promieniowanie zbliża się do równowagi z materią, czyli

$$S_\nu(\tau_{th}) \approx B_\nu(\tau_{th}) \quad (5.113)$$

W zgodzie z poprzednimi oszacowaniami, $\tau_{th} \approx \tau_1$. Na tej podstawie można wprowadzić następujący przybliżony wzór oceniający wartość S_ν w linii:

$$S_\nu^{II}(\tau_\nu) \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon + 2(1 - \epsilon)P_e(\tau_\nu)}} B_\nu(\tau_{th}) \quad (5.114)$$

Jest to t.zw. II-gie przybliżenie z prawdopodobieństwem ucieczki. Jego główną zaletą jest prawidłowe zachowanie asymptotyczne dla $\tau \rightarrow 0$ i ∞ , zgodne z rozważaniami poprzednich paragrafów. W pierwszym wypadku $S_\nu^{II} \rightarrow \sqrt{\epsilon} B_\nu$. W drugim wypadku $S_\nu^{II} \rightarrow B_\nu$. Zastosowania takich przybliżeń są dwojakie: do szybkich obliczeń szacunkowych, gdy n.p. ze względu na 3-wymiarową geometrię rozwiązanie modelu atmosfery może być zbyt kosztowne, oraz do znajdowania dobrych lokalnych przybliżeń startowych w metodach perturbacyjnych, n.p. ALI.

Rozdział 6

Obliczenia modeli atmosfer

6.1 Pełny układ równań atmosfery LNRT

6.1.1 Równania

W tabeli wyliczymy niewiadome oraz określające je równania w modelu atmosfery :

$$J_\nu(\tau) \quad \Lambda[S_\nu] = J_\nu \text{ albo} \quad \text{Transfer} \quad (6.1)$$
$$\frac{d^2 f_{\nu E} J_\nu}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu$$

$$\rho(\tau) \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{R.hydrostat.} \quad (6.2)$$

$$T(\tau) \quad \int_0^\infty \kappa_\nu (J_\nu - S_\nu) d\nu \quad \text{R.promienista} \quad (6.3)$$

(wyrazy z σ_ν się znoszą)

$$n_i(\tau) \quad n_i \sum_{j \neq i} (R_{ij} + C_{ij}) = \sum_{j \neq i} n_j (R_{ji} + C_{ji}) \quad \text{R.promienista} \quad (6.4)$$

$$n_e(\tau) \quad \sum_i n_i Z_i = n_e \quad \text{Zach.ładunku} \quad (6.5)$$

Przez τ oznaczamy standardową grubość optyczną, τ_ν - to samo dla częstotliwości ν , J_ν - średnie natężenie promieniowania, P - ciśnienie, z - głębokość geometryczna, ρ - gęstość materii, T - temperatura, n_i - obsadzenie i -tego poziomu, R_{ij} i C_{ij} - tempo przejść promienistych i zderzeniowych $i \rightarrow j$, n_e - gęstość elektronów, Z_i - ładunek i -tego jonu.

6.1.2 Funkcje materiałowe

Do obliczeń są potrzebne funkcje materiałowe, występujące jako współczynniki w równaniach budowy atmosfery. W praktyce programowanie i obliczanie wartości tych funkcji stanowi najbardziej złożoną część obliczeń. Z tego powodu często korzysta się z interpolacji gotowych tabel przygotowanych w postaci stawnej dla komputera.

$$R_{ij}, C_{ij} \quad \begin{array}{l} \text{Tempa} \\ \text{promienistych} \\ \text{zderzeniowych} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{przejść} \\ \text{i} \end{array} \quad (6.6)$$

$$\chi_\nu = \sigma_\nu + \kappa_\nu = \sum_i \sum_{j>i} [n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j] \sigma_{ij}(\nu) + \dots \quad \text{Nieprzezroczystość} \quad (6.7)$$

$$\eta_\nu = S_\nu \chi_\nu \quad \text{Emisyjność} \quad (6.8)$$

$$P(\rho, T) \quad \text{Równanie stanu} \quad (6.9)$$

gdzie σ_{ij} są przekrojami czynnymi dla przejścia $i \rightarrow j$.

6.1.3 Model atmosfery

Pełny model atmosfery określa przebieg podstawowych zmiennych J_ν, ρ, T, n_i, n_e dla $0 < \tau < \infty$. Parametrami modelu są:

$$\sigma T_e^4 \equiv F \quad \begin{array}{l} \text{Temperatura efektywna} \\ \text{atmosfery} \end{array} \quad (6.10)$$

$$g \equiv \frac{GM}{R^2} \quad \begin{array}{l} \text{Przyspieszenie grawita-} \\ \text{cyjne} \end{array} \quad (6.11)$$

$$X_i \quad \text{Skład chemiczny} \quad (6.12)$$

Na podstawie modelu za pomocą dodatkowych obliczeń w oparciu o rozwiązanie formalne t. transferu można wyliczyć widmo syntetyczne I_ν . Widmo syntetyczne można liczyć dla nieco innych, dokładniejszych wartości X_i oraz χ_ν , niż w modelu atmosfery. Warunkiem jest by te zmiany nie wpływały znacząco na równowagę promienistą modelu.

6.2 Metody rachunkowe

6.2.1 Wstęp

Specyfika metod numerycznych

Zrozumienie roli metod numerycznych w rozwiązywaniu problemów naukowych sprawia największą trudność początkującym. Z jednej strony grozi przesadna fascynacja stroną obliczeniową, podczas gdy jest to bardzo skomplikowane, ale jednak tylko narzędzie i nie stanowi celu samo w sobie. Z drugiej strony niebezpieczne jest lekceważenie: mimo kolosalnego postępu techniki obliczeniowej to wydajność stosowanych metod numerycznych a nie technika decydują o rozwiązalności zagadnień. Typowo rozwiązywane zagadnienia są na tyle skomplikowane,

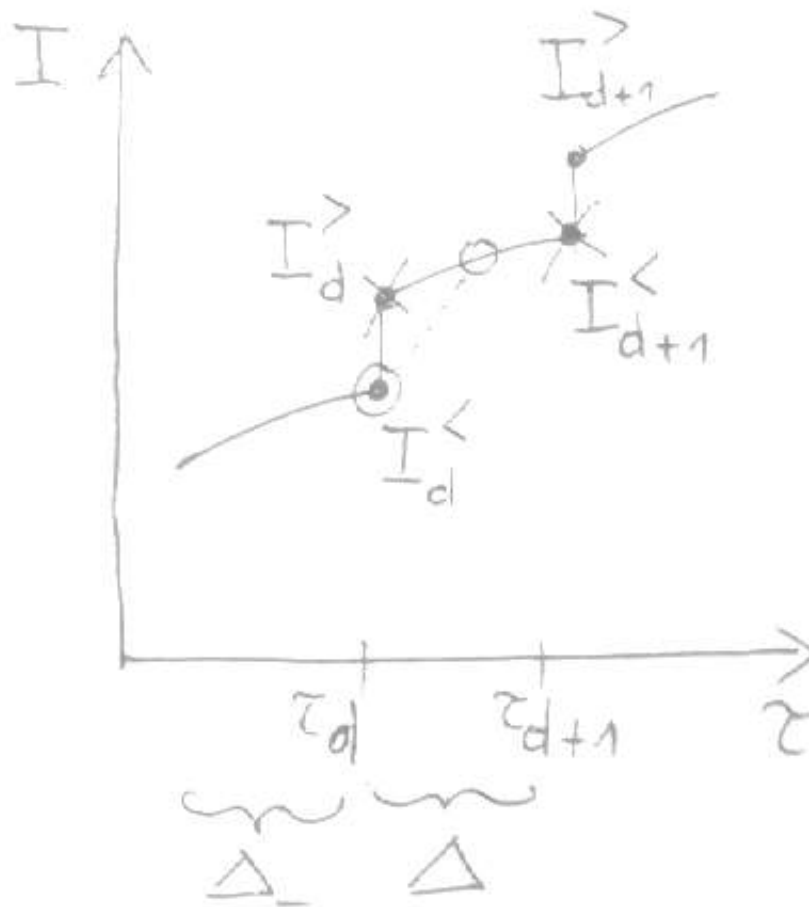
że konieczne jest stosowanie metod iteracyjnych i wówczas o wydajności obliczeń decyduje jakość pierwszego przybliżenia i szybkość zbiegania się rozwiązań. Na pierwszy rzut oka metody numeryczne wydają się proste, jednak często są bardzo wrażliwe na rozmaite szczegóły realizacji i wybór właściwego postępowania często jest wynikiem zbiorowego doświadczenia badaczy. Aspekt szczególnie widoczny w obliczeniach atmosfer to związek stosowanych metod z fizyką zagadnienia.

Rola fizyki

W teorii atmosfer fizyka ingeruje poprzez lokalność lub nielokalność sprzężenia promieniowania z materią. W przybliżeniu LRT zasadniczą rolę gra sprzężenie lokalne. W przybliżeniu LNRT z silnym rozpraszaniem mamy oddziaływanie materii z fotonami pokonującymi znaczne odległości przed pochłonięciem, czyli sprzężenie jest nielokalne. Wszystkie obliczenia w ostatecznym wyniku sprowadzają się do odwracania macierzy o dużym rozmiarze n . Ścisłe lokalne oddziaływanie odpowiadałoby macierzy diagonalnej. Jej odwracanie, to liczenie odwrotności elementów przekątnej czyli n operacji. Totalne sprzężenie wszystkich niewiadomych z wszystkimi oznacza pełną macierz współczynników, której odwracanie pociąga n^3 operacji. Przy tysiącach niewiadomych różnica jest olbrzymia. Co gorsza nielokalne sprzężenie zwykle oznacza gorszą zbieżność rozwiązań, bardzo zwiększając ilość obliczeń. Z tego powodu najlepsze obecnie metody (ALI) opierają się na podziale oddziaływań na część lokalną (jak największą), dla której dokonuje się rozwiązań ściśle przy zmniejszonej ilości oddziaływań. Część nielokalną (możliwie niedużą) uwzględnia się potem jako perturbacje rozwiązania.

Realizacja rozwiązania formalnego r.t.

We wszystkich metodach praktycznych jako niewiadomych szuka się J_ν . Mają one tę przewagę, że w odróżnieniu od I_ν nie zależą od μ , zatem liczba niewiadomych wartości n w macierzach równań jest mniejsza. Na tym etapie obliczeń gdzie potrzebne są I_ν , można je odtworzyć wstawiając J_ν do S_ν i korzystając z rozwiązania formalnego równania transferu. Nie korzystamy jednak z postaci całkowitej r. formalnego, bo oznacza ona, że dla każdej warstwy trzeba liczyć całkę/sumę po wszystkich warstwach. Korzystamy zamiast tego z faktu, że rozwiązanie formalne jest rozwiązaniem różniczkowego r.transferu z zadaną S_ν . W przybliżeniu dyskretnych warstw w takim równaniu dla każdej warstwy występują tylko wartości z dwu najbliższych warstw, konieczne do obliczenia przybliżonej wartości pochodnej. Obliczonych z rozwiązania r.transferu I_ν nie przechowujemy lecz natychmiast wykorzystujemy do obliczenia nowego przybliżenia J_ν . W ten sposób w oparciu o rozwiązania różniczkowe efektywnie realizujemy całkowity operator



Rysunek 6.1: Parametryzacja kształtu widma w metodzie schodkowej rozwiązania R.T.

Δ : startujemy z zadanego S_ν i obliczamy J_ν . Nadal jest to tylko rozwiązanie formalne bo zwykle nowe J_ν różni się od wyjściowego J_ν . Występujące po drodze r. transferu rozwiązuje się jako algebraiczne zastępując różniczki ilorazami różnicowymi niewiadomych. Przy tym można korzystać albo ze zwykłej postaci r. transferu (metody I-szego rzędu) albo z postaci $d^2 f_E J_\nu / d\tau_\nu^2 \dots$ lub podobnej (metody II-go rzędu: metoda Feautrieu i metoda czynników Eddingtona).

6.2.2 Metoda schodkowa (I-szego rzędu)

Rozwiązania dokonujemy wzdłuż konkretnego promienia i τ oznacza grubość optyczną na drodze tego promienia. W metodzie schodkowej zasadniczo ciągłą zmienną I_ν przybliżamy wartościami funkcji schodkowej. Schodki mają różne nachylenia stopni i skoki w kolejnych warstwach. W ten sposób w jakiejś warstwie, n.p. o numerze d mamy 2 wartości I po obu stronach schodka: $I_d^< \neq I_d^>$. Szerokość schodka to odległość warstw $\Delta = \tau_{d+1} - \tau_d$. Ponieważ schodki oznaczają 2 niewiadome $I_d^<$ i $I_d^>$ w każdej warstwie potrzebne są odpowiednie 2 równania do ich znalezienia. W tym celu użyjemy dwu różnych oszacowań pochodnej w równaniu transferu: nachylenia stopnia i nachylenia odcinka łączącego środek stopnia z podstawą następnego schodka (patrz rysunek):

$$\frac{I_{d+1}^< - I_d^>}{\Delta} = S_{d+1} - I_{d+1}^< \quad \text{dla linii x-x} \quad (6.13)$$

$$\frac{\frac{I_{d+1}^< + I_d^>}{2} - I_d^<}{\frac{\Delta}{2}} = S_d - I_d^< \quad \text{dla linii o-o} \quad (6.14)$$

$$(6.15)$$

Jedno z przybliżeń przecenia nachylenie, drugie niedocenia, razem zapewniają stabilność metody i mniejszą wrażliwość na błędy zaokrągleń.

Eliminując z tych równań $I_d^>$ otrzymujemy

$$(\Delta^2 + 2\Delta + 2)I_{d+1}^< - 2I_d^< = \Delta S_d + \Delta(\Delta + 1)S_{d+1} \quad \text{oraz} \quad (6.16)$$

$$(\Delta^2 + 2\Delta + 2)I_d^> = 2(\Delta + 1)I_d^< + \Delta(\Delta + 1)S_d - \Delta S_{d+1} \quad (6.17)$$

W pierwszym z równań (6.16) $I^>$ nie występują i może ono służyć do znajdowania $I_d^<$ w oparciu o wartości z poprzednich warstw, poczynając od warunku brzegowego. Wówczas wartości $I_d^>$ można znaleźć z (6.17). Na zakończenie obliczeń I_d znajdujemy jako średnią ważoną długością stopni:

$$I_d = \frac{I_d^< \Delta + I_d^> \Delta_-}{\Delta + \Delta_-} \quad (6.18)$$

gdzie $\Delta_- = \tau_d - \tau_{d-1}$. W ten sposób znajdujemy wszystkie I_d w oparciu o zadane S_d . Obliczenia należy powtórzyć dla kilku innych kierunków, w zależności od przyjętej dyskretyzacji μ .

6.2.3 Metody II rzędu

Feautrieu

Podobnie jak w metodzie 2 promieni definiujemy

$$j = \frac{I(+\mu, \nu) + I(-\mu, \nu)}{2} \quad (6.19)$$

$$h = \frac{I(+\mu, \nu) - I(-\mu, \nu)}{2} \quad (6.20)$$

gdzie $j, h = j, h(\mu, \nu)$. Wstawiając nowe zmienne do r.transferu dostajemy

$$\begin{aligned} \mu \frac{dh}{d\tau} &= j - S \\ \mu \frac{dj}{d\tau} &= h \end{aligned}$$

Różniczkując i podstawiając mamy

$$\mu \frac{d^2 j}{d\tau^2} = j - S \quad (6.21)$$

Jest to równanie różniczkowe 2-rzędu zatem potrzebuje warunków brzegowych na pochodne. Z zewnętrznego i wewnętrznego warunku brzegowego mamy

$$\begin{aligned} \mu \frac{dj}{d\tau} \Big|_0 &= j - I^-|_0 = j|_0 \\ \mu \frac{dj}{d\tau} \Big|_{\tau_{max}} &= -j + I^+|_{\tau_{max}} = -j + B_\nu + \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau} \Big|_{\tau_{max}} \end{aligned}$$

gdzie prawą stronę warunku wewnętrznego przedstawiliśmy w postaci przybliżenia dyfuzyjnego.

Dyskretyzacja (6.21) t.j rozbitcie atmosfery na warstwy ptowadzi do równania algebraicznego

$$\mu^2 \frac{\frac{j_{d+1} - j_d}{\Delta_+} - \frac{j_d - j_{d-1}}{\Delta_-}}{\Delta_+ \Delta_-} = j_d - S_d \quad (6.22)$$

gdzie $\Delta_+ = \tau_{d+1} - \tau_d$ oraz $\Delta_- = \tau_d - \tau_{d-1}$

Podobną do metody Feautrieu metodą II rzędu jest metoda czynników Eddingtona naszkicowana w paragrafie 3.2.3. Różnica polega na tym, że naszkicowaną powyżej metodę dyskretyzacji równania transferu w postaci 2-go rzędu stosuje się nie tylko do znajdowania $I(\mu, \nu)$, ale najpierw w podobny sposób znajduje się J_ν z rozwiązania (3.19).

Figure 5.1: The structure of the monofrequent Feautrier matrix for coherent scattering with $m = 3$. It consists of 3×3 submatrices, one per depth point. All empty elements are zero.

Rysunek 6.2: Kształt macierzy Feautrieu. Taka macierz nazywa się pasmową, bowiem nie znikają w niej tylko wyrazy w pasie wzdłuż przekątnej.

Rozwiązanie równań relaksacyjnych

Równanie (6.22) sprowadza się do standardowej postaci występującej w relaksacyjnych metodach rozwiązywania zagadnień brzegowych równań różniczkowych:

$$-A_d j_{d-1} + B_d j_d - C_d j_{d+1} = L_d \quad (6.23)$$

gdzie w tym konkretnym wypadku

$$A_d = \frac{2}{\Delta_- (\Delta_- + \Delta_+)} \quad B_d = 1 + \frac{2}{\Delta_+ \Delta_-} \quad C_d = \frac{2}{\Delta_+ (\Delta_- + \Delta_+)} \quad (6.24)$$

Układ takich równań dla wszystkich warstw ma postać macierzy z niezerowymi współczynnikami w kwadratowych blokach na wzdłuż przekątnej i dwu najbliższych niej pod/nad-przekątnych zbudowanych z takich bloków. Równania w narożnikach mają o jeden wyraz mniej i odpowiadają warunkom brzegowym. Na rys. 6.2 przedstawiamy przykład macierzy Feautrieu dla bloków 3×3 , odpowiadających 3 różnym wartościom kąta i długości fali.

Taki układ najprościej rozwiązuje się zwykłą metodą eliminacji: z równania 1 wyznaczamy j_1 i eliminujemy z pozostałych j_1 , to samo z j_2 i.t.d. W ten sposób dostajemy układ z 1 na przekątnej, 0 pod przekątną, D_d nad przekątną i Z_d po

prawej stronie o postaci równań

$$j_d - D_d j_{d+1} = Z_d \quad (6.25)$$

Ostatnie z równań przybiera postać $1 \cdot j_n = Z_n$ skąd j_n . Podstawiając oczko wyżej mamy j_{n-1} i.t.d. Całą procedurę można przedstawić w zgrabnej postaci dwu pętli obliczeń:

$$\begin{aligned} D_0 &= 0 & Z_0 &= 0 \\ D_d &= (B_d - A_d D_{d-1})^{-1} C_d \\ Z_d &= (B_d - A_d D_{d-1})^{-1} (L_d + A_d Z_{d-1}) \quad \text{dla } d = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= 0 \\ j_d &= D_d j_{d+1} + Z_d \quad \text{dla } d = n, \dots, 1 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dowód najlepiej przeprowadzić przez indukcję, zakładając, że do warstwy $d - 1$ mamy postać $1, D, Z$ (6.25) a dalej A, B, C, L (6.23). Wówczas eliminacja w równaniu (6.23) dla d prowadzi do wzorów (6.26). Mianowicie przedstawiając (6.25) jako $j_{d-1} = D_{d-1} j_d + Z_{d-1}$ i podstawiając do (6.23) mamy $(-A_d D_{d-1} + B_d) j_d + C_d j_{d+1} = L_d - A_d Z_{d-1}$. Dzieląc przez $(B_d - A_d D_{d-1})$ otrzymujemy wynik (6.26). Powyższa metoda ma szersze zastosowanie niż to wygląda na pierwszy rzut oka. Ponieważ algebra macierzy obejmuje te same 4 działania na jakich opierała się eliminacja, identyczne wzory dostaniemy gdy A, B i C będą kwadratowymi macierzami a L wektorem współczynników równań. Dopuszczalny jest zatem układ równań w którym więcej niż para pod/nadprzekątnych nie znika. Taki układ występuje przy obliczeniach budowy wnętrz gwiazd.

Zarówno w przypadku liczb jak i macierzy muszą być spełnione warunki nieosobliwości odpowiednich elementów odwrotnych. Z postaci (6.26) wynika, że te warunki najłatwiej spełnić dla B dużych względem A (oraz C). Okazuje się także, że wówczas macierz układu jest zdominowana przez przekątną i iteracje się szybko zbiegają. Matematycznie oznacza to że macierz układu jest dodatnio określona a jej wyznacznik jest duży. W przypadku (6.24) sprzyja temu wybór dużej odległości warstw Δ . Odpowiada to wzrostowi roli sprzężenia lokalnego kosztem nielokalnego. I tak fizyka splata się z numeryką. Oczywiście wybierając duże Δ kiepsko przybliżamy pochodne zatem potrzebny jest pewien kompromis.

Liniowa f. źródłowa

W przypadku rozpraszania w linii w modelu atomu 2-poziomowego r. transferu można zapisać jako wektorowe liniowe równanie różniczkowe

$$\mu \frac{dI_{\mu\nu}}{d\tau} = \Phi_\nu \left[I_{\mu\nu} - (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \sum_{\mu'\nu'} W_{\mu'\nu'} \Phi_{\nu'} I_{\mu'\nu'} - \eta \right] \quad (6.28)$$

gdzie \bar{J} przedstawiliśmy w postaci odpowiedniej sumy. Traktując indeksy $\mu\nu$ jako numerujące składowe wektora I to r. transferu można zapisać wektorowo

$$\frac{d\bar{I}}{d\tau} = \overline{\overline{M}} \bar{I} + \overline{N} \quad (6.29)$$

gdzie M i N są znane. Takie równanie można rozwiązać n.p. wektorową odmianą metody Feautrieu. Problem polega na tym, że reprezentujące rozpraszanie macierz M ma duży rozmiar $n \times n$ gdzie $n = n_\mu \times n_\nu$ a n_μ i n_ν są ilością dyskretnych kątów i częstości w linii. Daje ona wkład do macierzy A i odwracanie takiej macierzy w każdej warstwie jest powolne, ze względu na ilość operacji n^3 .

6.2.4 Przybliżone Λ iteracje

Metoda perturbacyjna

Od angielskiego skrótu approximate lambda iterations metoda przybliżonych Λ iteracji jest zwana metodą ALI. Jak wyjaśnialiśmy już (patrz 5.4.1 6.2.1) w praktycznych obliczeniach nie używa się metod operatorowo-całkowych bo są one znacznie wolniejsze niż metody różniczkowe. Ponieważ jednak istnieje dualizm polegający na tym, że każdy problem różniczkowy można przedstawić jako całkowy i odwrotnie, do opisu metod ALI użyjemy formalizmu operatorowego jako bardziej przejrzystego. Natomiast praktyczna realizacja będzie w oparciu o poznane różniczkowe metody szukania rozwiązania formalnego. W tym sensie operator Λ efektywnie reprezentuje rozwiązanie formalne różniczkowego równania transferu wysumowane po kątach: $\Lambda[S] = J$. W ten sposób metody ALI nie zastępują poznanych metod różniczkowych lecz stanowią ich niezwykle efektywne zastosowanie. Pozwoliły one na ponad 10-krotne przyśpieszenie obliczeń i/lub rozpatrywanie bardziej złożonych modeli. Przy obliczeniach zajmujących tygodnie na szybkich maszynach nie są to oszczędności bagatelne.

Formalnie zawsze możemy prawdziwy operator Λ dla danego problemu przedstawić w postaci sumy operatora Λ^* dla prostszego problemu i perturbacji:

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \quad (6.30)$$

Wtedy operatorowe równanie transferu (5.104) można przedstawić jako

$$S = (1 - \epsilon)\Lambda[S] + \epsilon B = (1 - \epsilon)\Lambda^*[S] + (1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)[S] + \epsilon B \quad (6.31)$$

Do tego momentu nie zrobiliśmy nic nadzwyczajnego, wypisując tożsamości. Istotny krok polega na zauważeniu, że przy dogodnym wyborze Λ^* po prawej stronie drugi wyraz będzie mały względem pierwszego. Popołniając niewielki

błąd możemy w nim zastąpić dokładną wartością S przybliżeniem z ostatniej iteracji, n.p. $S^{(n)}$. Wówczas równanie dla następnego przybliżenia $S^{(n+1)}$ przybiera postać:

$$S^{(n+1)} = (1 - \epsilon)\Lambda^*[S^{(n+1)}] + \underline{(1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)[S^{(n)}]} + \underline{\epsilon B} \quad (6.32)$$

gdzie podkreślone wyrazy są z góry znane. Można je traktować jako nową postać lokalnej części f. źródłowej ϵB . W efekcie problem rozwiązania transferu z zawiłym operatorem sprowadził się do rozwiązania problemu z prostym, prawie lokalnym operatorem Λ^* . Ceną płaconą za to jest konieczność iteracji. Taka metoda rozwiązywania równań ogólnie nazywa się metodą perturbacyjną.

Do celów praktycznych wygodniej jest zapisać (6.32) jako:

$$S^{(n+1)} - S^{(n)} = [1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*]^{-1}(S^{FS} - S^{(n)}) \quad \text{gdzie} \quad (6.33)$$

$$S^{FS} = (1 - \epsilon)(\Lambda - \Lambda^*)[S^{(n)}] + \epsilon B \quad (6.34)$$

oznacza znaną część S . W tej postaci łatwiej widać zalety rachunkowe metody ALI. Pamiętając o realizacji dyskretnej operatorów jako macierzy o rozmiarze n widać, że odwracany operator przy dobrym wyborze Λ^* jest diagonalny albo prawie diagonalny/lokalny, zatem koszt tej operacji jest $\sim n$ operacji, kolosalny zysk względem n^3 dla nielokalnego Λ . Policzenie S^{FS} nie jest tak kosztowne bo mnożenie pełnej macierzy przez wektor wymaga n^2 operacji (każdy element jest mnożony raz). Sprawdzone postępowanie opiera się na użyciu wektorowej metody Feautrieu do rozwiązania równania transferu (odwrócenia operatora). Ponieważ Λ^* jest (prawie)lokalny, to wektory i macierze są małe, $n_\mu \times n_\nu \sim 1$ i obliczenia są szybkie. Rozwiązanie formalne S^{FS} jest realizowane jedną z metod I-go lub II-go rzędu. Iteracje należy prowadzić aż do momentu gdy poprawki staną się małe, $S^{(n+1)} - S^{(n)} \ll S^{(n)}$. W tej metodzie skutecznie stosowano czysto numeryczne metody przyśpieszania zbieżności rozwiązań. Przykład takiej metody, metodę δ^2 Aitkena omówimy nieco później. Cała sztuka w metodzie ALI polega na zgrabnym wyborze Λ^* .

Przybliżone operatory Λ^*

Operator nasycenia jądra linii

Ten prosty operator wywodzi się z przybliżenia Barbier-Eddingtona:

$$\Lambda^*[S_\nu] = \begin{cases} S_\nu(\tau_\nu) & \tau_\nu > \gamma \\ \frac{1}{2}S_\nu(\tau_\nu = \gamma) & \tau_\nu < \gamma \end{cases} \quad (6.35)$$

gdzie $\gamma \sim 3$.

Operator Scharmera

Operator ten opiera się na samym rozwiązaniu formalnym Barbier-Eddingtona wzdłuż drogi promienia, skąd postać operatora

$$\begin{aligned} S &= a + b\tau_{\mu\nu} \\ I_{+\mu\nu} &= a + b + b\tau_{\mu\nu} \\ I_{-\mu\nu} &= a - b + b\tau_{\mu\nu} - (a - b)e^{-\tau_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

W oparciu o to rozwiązanie operator dla natężenia $\Lambda_{\mu\nu}^*$ przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned} I_{\pm\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}^*[S_\nu] &= W_{\pm\mu\nu} S_\nu(f_{\pm\mu\nu}(\tau_{\mu\nu})) \quad \text{gdzie} \quad (6.37) \\ W_{+\mu\nu} = 1 \quad f_{+\mu\nu} &= \tau_{\mu\nu} + 1 \\ W_{-\mu\nu} = 1 - e^{-\tau_{\mu\nu}} \quad f_{-\mu\nu} &= \frac{\tau_{\mu\nu}}{1 - e^{-\tau_{\mu\nu}}} - 1 \end{aligned}$$

Wagi W_{\pm} spełniają warunki brzegowe: $W_{\pm\mu\nu} \rightarrow 1$ dla $\tau_{\mu\nu} \rightarrow \infty$ oraz $W_{-\mu\nu} \rightarrow 0$ dla $\tau_{\mu\nu} \rightarrow 0$.

Sam operator Λ^* realizujemy jako

$$\Lambda^*[S_\nu] = \bar{J} = \sum g_{\mu\nu} I_{\pm\mu\nu} \quad (6.38)$$

gdzie $g_{\mu\nu}$ są wagami całkowania po kątach i po profilu linii.

Operator lokalny (OAB)

Ostatnia z metod opiera się na wzięciu przekątnej operatora Λ :

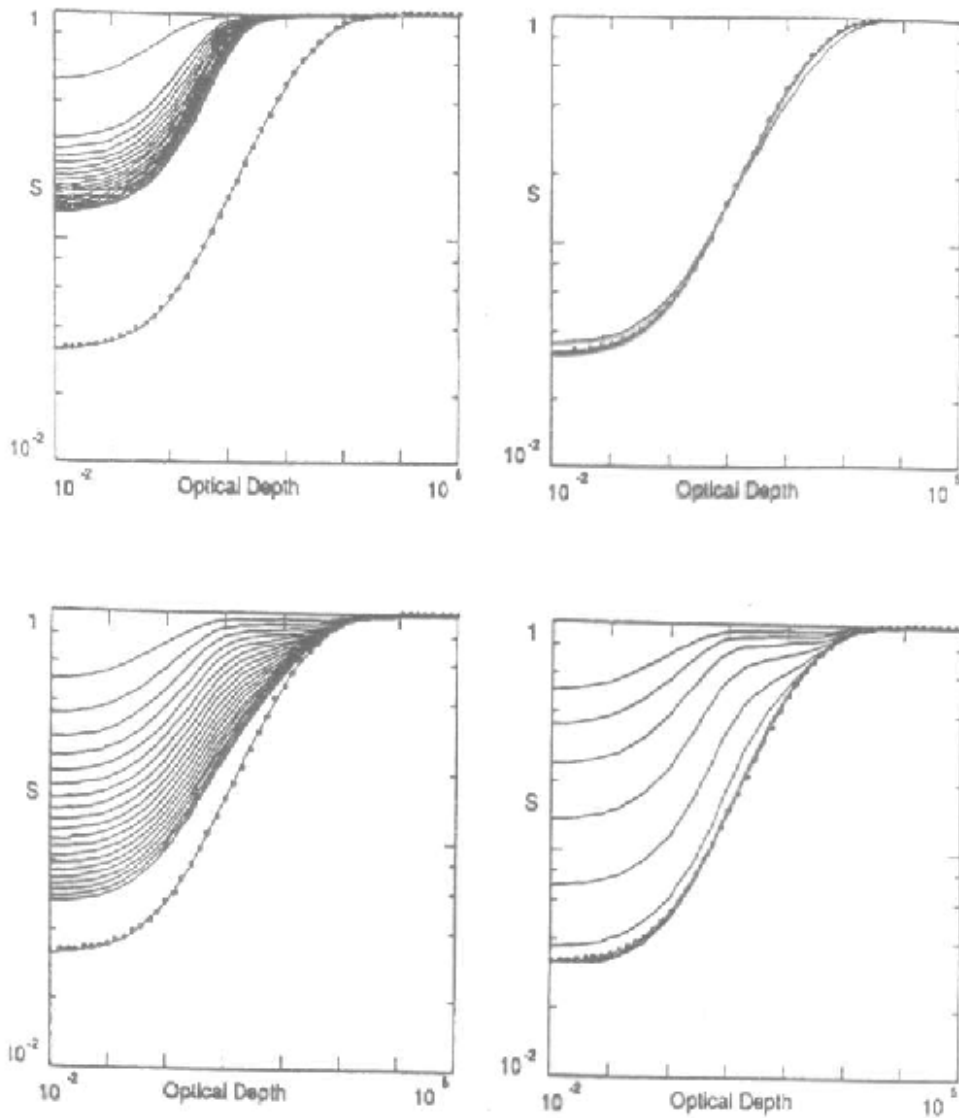
$$\Lambda^* = \text{Diag}(\Lambda) \quad (6.39)$$

W ten sposób operator Λ^* uwzględnia całość oddziaływań lokalnych. Ta metoda została pierwszy raz zastosowana jako modyfikacja Feautrieu przez Rybickiego i Hummera (1991)

6.2.5 Przyśpieszanie zbieżności

Zdarza się w obliczeniach, że w czasie iteracji odległość wartości zmiennych od rozwiązania S_0 zmniejsza się tylko o stały czynnik α . Innymi słowy w czasie kolejnych iteracji spełniony jest warunek

$$S^{(n+1)} - S_0 \approx \alpha S^{(n)} - S_0 \quad (6.40)$$



Rysunek 6.3: Porównanie zbieżności różnych metod rozwiązania R.T. dla atomu 2-poziomowego w atmosferze izotermicznej. Pierwszy panel pokazuje zwykłe Λ iteracje, w których nie osiągnięto zbieżności do dolnego rozwiązania mimo wielu kroków. Pozostałe panele dotyczą metody ALI z i bez ekstrapolacji"i oraz metody Feautrieru. Proszę zwrócić uwagę na dobrą zbieżność iteracji w całej szerokości profilu.

gdzie α jest stałe w kolejnych iteracjach i $|\alpha| < 1$. Taka powolna zbieżność nazywa się zbieżnością liniową. Można ją przyspieszyć przez ekstrapolację zwaną procesem δ^2 Aitkena. Zapisując (6.40) dla n i $n + 1$ i dzieląc stronami dostajemy

$$\frac{S^{(n+2)} - S_0}{S^{(n+1)} - S_0} = \frac{S^{(n+1)} - S_0}{S^{(n)} - S_0} \quad (6.41)$$

Rozwiązując względem S_0 dostajemy

$$S_0 = \frac{S^{(n+2)}S^{(n)} - S^{(n+1)^2}}{S^{(n+2)} - 2S^{(n+1)} + S^{(n)}} = S^{(n+2)} - \frac{(\Delta S_{n+1})^2}{\Delta^2 S_{n+1}} \quad (6.42)$$

Stosowane są też metody ekstrapolacji oparte o wzory interpolacyjne dopasowane do poprzednich rozwiązań metodą najmniejszych kwadratów.

Rozdział 7

Wyniki i ich zastosowania

7.1 Przegląd wyników rachunków

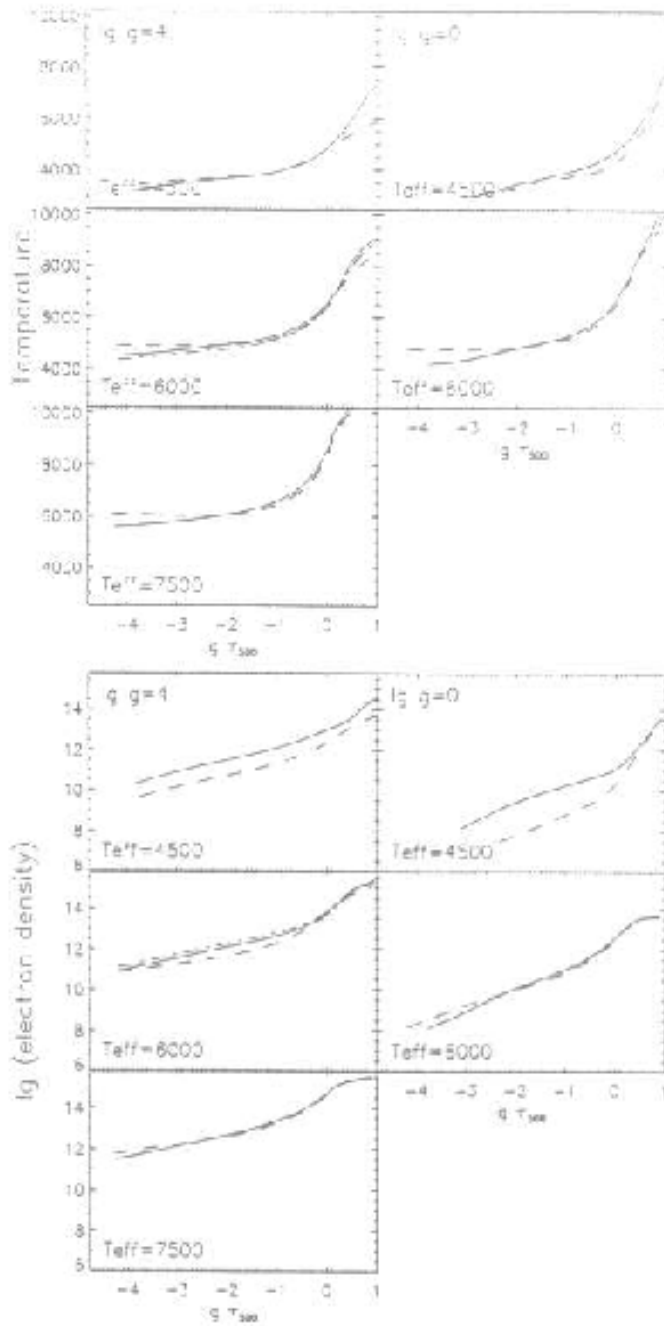
7.1.1 Modele LTE

Kurucz policzył obszerną serię modeli atmosfer gwiazd w LTE dla szerokiej gamy parametrów, z uwzględnieniem efektu blanketingu dla ponad 2 mln linii. Jego modele są dostępne wwww i pokrywają zakres T_e od 5000 K w górę. Do wielu celów wystarczy po prostu skopiować odpowiedni model. Obliczenia zostały wykonane programem ATLAS. Jest on także dostępny na stronie wwww Kurucza i może być użyty dla otrzymania modeli brakujących kombinacji takich parametrów jak T_e , g czy skład chemiczny. Na rys. 7.1 przedstawiamy strukturę modeli atmosfery dla różnych T_e i $\log g = 4$, t.j. dla gwiazd z okolic ciągu głównego. Przedstawione wykresy podają rozkład temperatury T oraz rozkład gęstości elektronów N_e . Na kolejnych rysunkach (Rys. 7.2, – 7.4) przedstawiamy wykresy widma tych modeli oraz odpowiedniego pociemnienia brzegowego.

Modele Kurucza nie uwzględniają powstawania w atmosferze cząsteczek kilkuatomowych. Z tego powodu nie należy ich używać dla $T_e < 5000$ gdy w atmosferze powstaje wiele molekuł i ich pochłanianie zaczyna dominować. Najbardziej znane modele atmosfer uwzględniające cząsteczki policzyli Johansson i Bell. Tzeba jednak pamiętać, że fizyka cząsteczek jest bardzo złożona i modele te nie mają jeszcze tej dokładności jak modele w wyższych temperaturach.

Ze względu na znaczną komplikację modeli NLTE i ich zależność od wielu parametrów, brak jest gotowych tablic modeli pokrywających typowe ich zastosowania. Dla szczególnych warunków można się posłużyć opublikowanymi modelami NLTE. Dostępne w sieci wwww jest kilka programów do obliczeń modeli NLTE. Spośród nich najbardziej znany jest program TLUSTY Hubeny'ego.

Poniżej przedstawiamy pobieżny przegląd efektów występujących w warunkach NLTE. Na rys. 7.5 przedstawiamy przekrój górnych warstw atmosfery Słońca,



Rysunek 7.1: Profile zmian temperatury i gęstości elektronowej w atmosferach gwiazd o różnej temperaturze efektywnej T_e i grawitacji $\log g = 4$ odpowiadającej ciągu głównemu gwiazd.

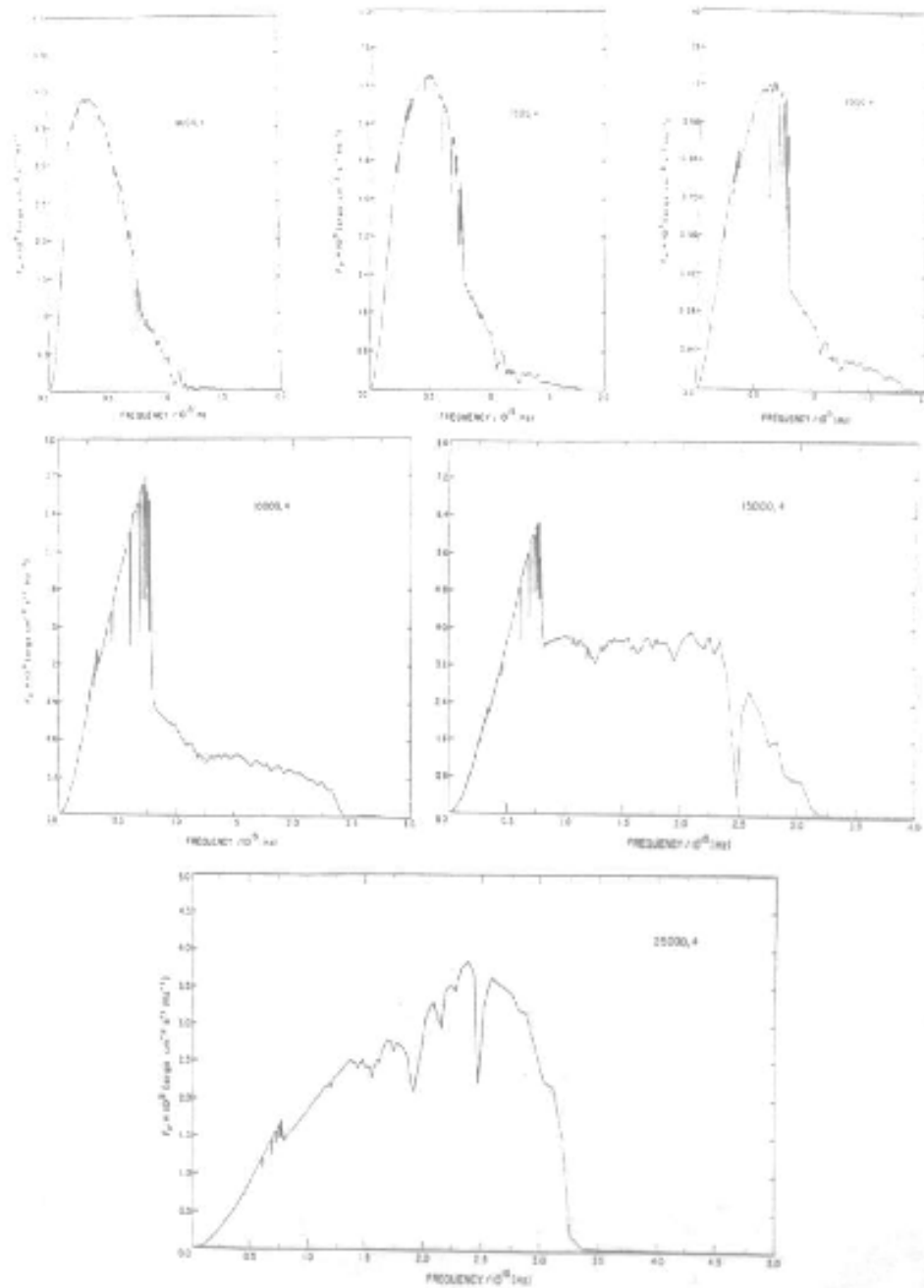


Figure 8.26: Computed LTE-RE flux spectra F_ν against ν for solar abundances, $\log g = 4$ and $T_{\text{eff}} = 6000, 7000, 8000, 10000, 15000, 25000$ K. In the x-axis units of 10^{15} Hz the Lyman, Balmer and Paschen bound-free thresholds are at $\nu = 3.3, \nu = 0.8$ and $\nu = 0.4$, respectively. The H I Ly α line is at $\nu = 2.5$, the Balmer series extends over $\nu = 0.25 - 0.8$ and the Paschen series over $\nu = 0.25 - 0.4$. From Kurucz (1979).

Rysunek 7.2: Zmiany kształtu widma atmosfer LTE Kuruczaw funkcji temperatury. W wyższych temperaturach rzuca się w oczy skok widma w pobliżu progu jonizacji Lymana przy 912 \AA . 101

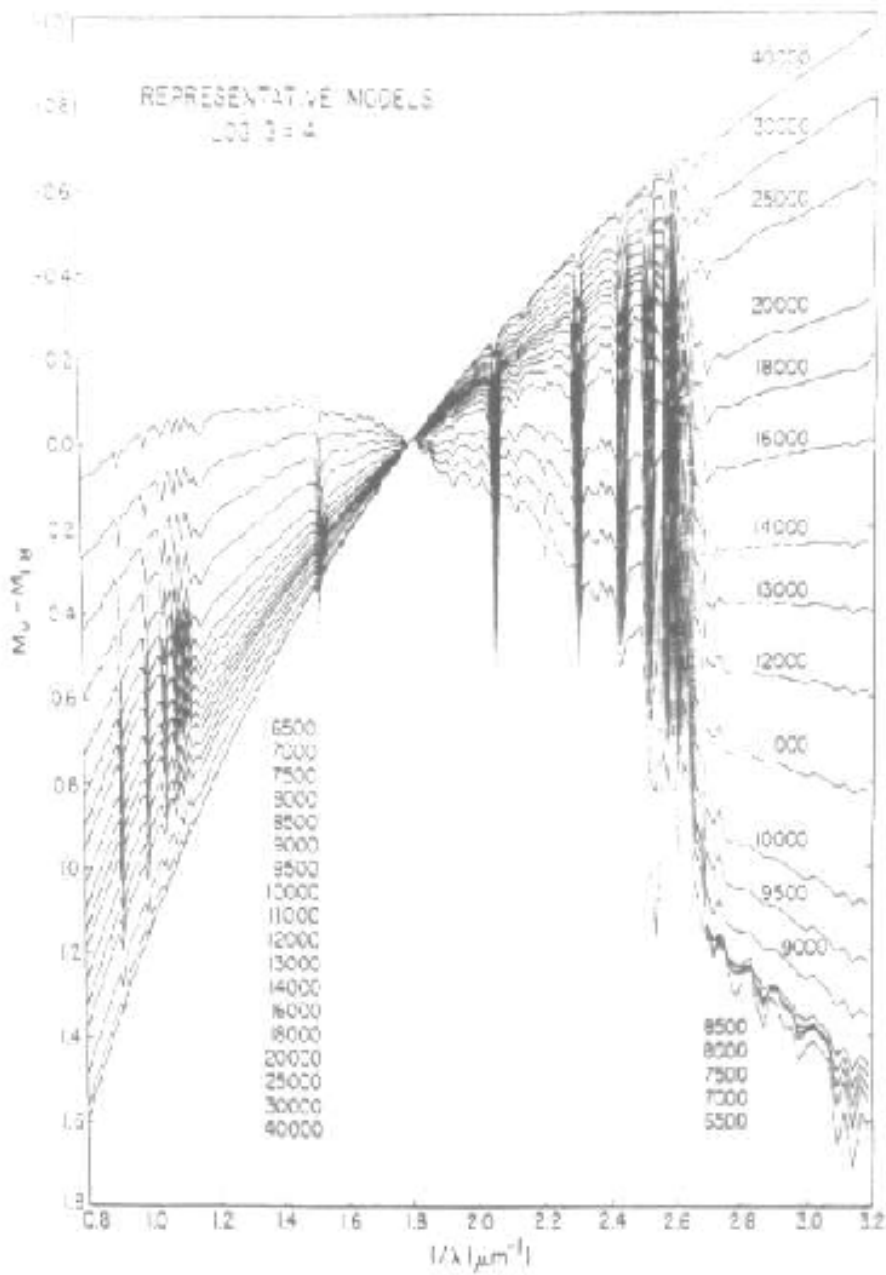
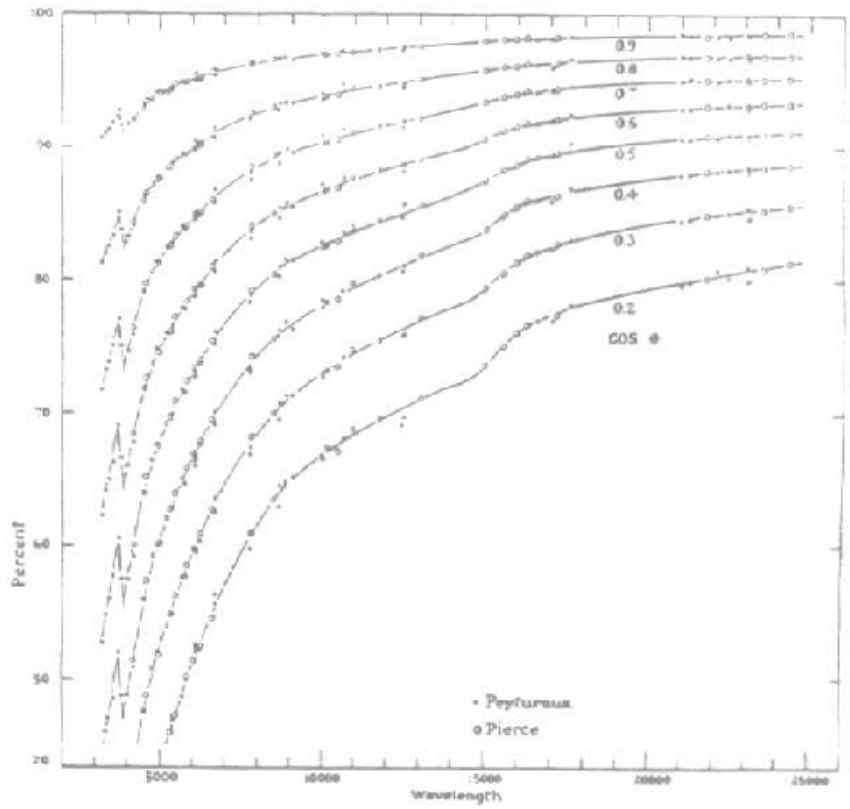


Figure 5.23. Computed color $M_b - M_r$ against inverse wavelength $1/\lambda$ in the optical part of the spectrum for the indicated values of T_e . The inverse wavelength $1/\lambda = 1.8 \mu\text{m}^{-1}$ ($\lambda = 0.556 \mu\text{m} = 556 \text{ nm}$) corresponds approximately to the passband of the V filter in the UBV photometry system. The H I Paschen and Balmer series limits are at $1/\lambda = 1.23 \mu\text{m}^{-1}$ and $1/\lambda = 2.74 \mu\text{m}^{-1}$, respectively. (From Kurucz, 1979)

Rysunek 7.3: Zmiana nachylenia widma w obszarze widzialnym w funkcji T_e . Wszystkie widma zostaly przeskalowane tak by wartosc strumienia przy 566 nm byla jednakowa.



Rysunek 7.4: Pociemnienie brzegowe w zależności od przedziału widma.

gdzie powstają jądra najsilniejszych linii widmowych. W takich warunkach, przy b.niskiej gęstości, dominują efekty NLTE. Przy tym chłodzenie staje się coraz mniej wydajne i temperatura rośnie na zewnątrz. W takich warunkach profile linii silnie odbiegają od kształtu z LTE. Wobec wzrostu temperatury na zewnątrz pojawia się możliwość odwrócenia profilu linii (jądro jaśniejsze niż okolica) lub wręcz pojawienie się linii emisyjnej. Tak byłoby zawsze przy LTE, ale konkurują tutaj efekty NLTE prowadzące do deficytu obsadzenia poziomów w atomach.

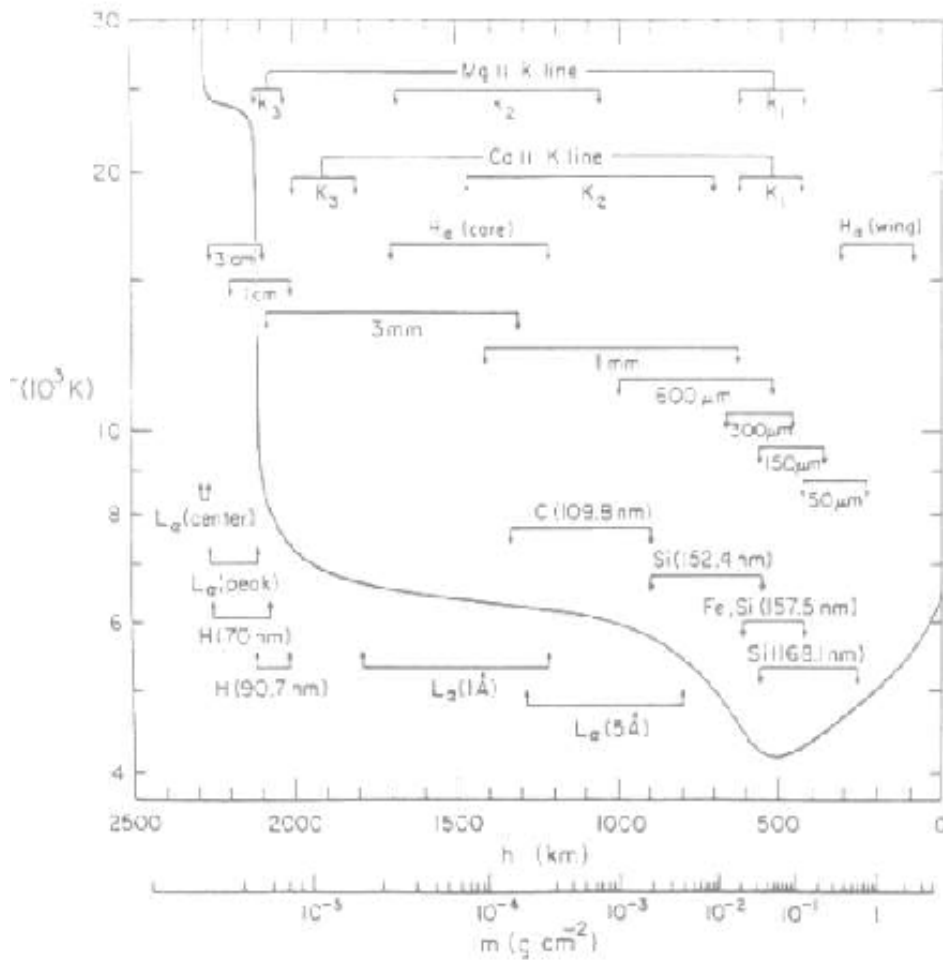
Uwzględnienie linii i NLTE w modelach gorących gwiazd (typu B/A) powoduje znaczne modyfikacje rozkładu temperatury w wysokich warstwach atmosfery (Rys. 7.6). Wskutek tego zmianom ulegają jądra silnych linii powstające w tych warstwach, ale nie kształt kontinuum. Podwyższenie temperatury na zewnątrz w modelach NLTE wiąże się z defektem obsadzenia poziomów wzbudzonych atomów i wywołanym przez nie spadkiem wydajności chłodzenia względem LTE. Podobne efekty w jeszcze gorętszej atmosferze gwiazdy typu O przedstawiono na rys. 7.7. Z jednej strony widać wpływ przesłaniania w głębi. Z drugiej reakcją wysokich warstw atmosfery na dodanie domieszek jest obniżenie temperatury (względem NLTE bez domieszek) wskutek wzrostu chłodzenia w licznych słabych liniach. Jednak w atmosferach bardzo gorących podstawowym problemem jest nie uwzględnienie domieszek ale wpływu gazu z atmosfery. Transfer promieniowania atmosfery znajdującej się w ruchu stanowi obecnie najciekawszy problem w teorii atmosfer, ale komplikacje tematu znacznie przekraczają zakres niniejszego wykładu.

7.2 Zastosowania modeli atmosfer

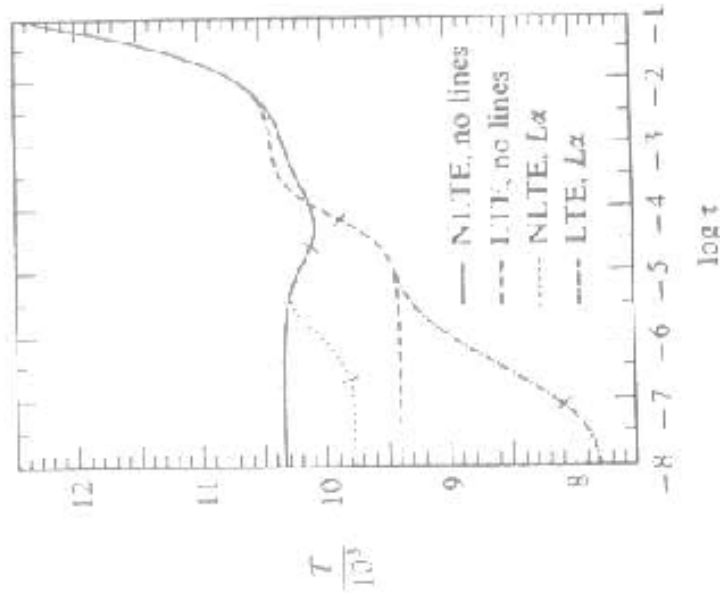
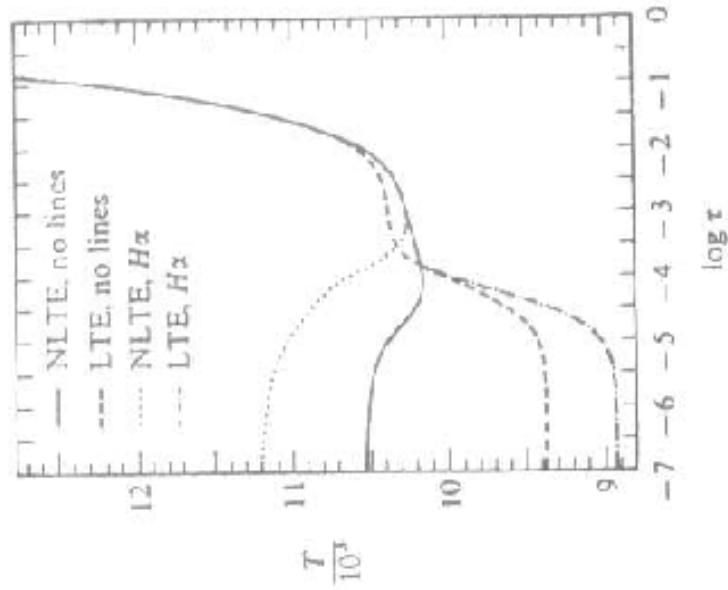
Modele atmosfer zbudowane w oparciu o teorię są tylko jednym z elementów łańcucha logicznego:

$$\text{Założona fizyka} \Leftrightarrow \text{Model atmosfery} \Leftrightarrow \text{Syntetyczne widmo} \Leftrightarrow \text{Obserwacje} \quad (7.1)$$

W zależności od zapotrzebowania, można się poruszać wzdłuż łańcucha w obie strony. Obserwacje widm gwiazd mogą być tu surowcem dodalnej interpretacji jak i testem końcowym przewidywań teorii. Najważniejszym produktem jest tu zrozumienie natury zjawisk fizycznych w atmosferach gwiazd. Oprócz tego teoria atmosfer ma zastosowanie bardziej przyziemne do diagnostyki gwiazd, t.j. wyznaczania ich podstawowych parametrów oraz jako dostawca warunków brzegowych dla teorii budowy gwiazd. To ostatnie zadanie jest niezbyt trudne z punktu widzenia atmosfer i nie będziemy się nim zajmować.



Rysunek 7.5: Przekrój modelu NLTE górnych warstw atmosfery Słońca (Chromosfery). Zaznaczono przebieg temperatury oraz miejsca powstawania linii widmowych. Proszę zwrócić uwagę, że linie lub ich jądra powstające w obszarze wzrostu temperatury na zewnątrz mają zaburzony profil, z możliwością odwrócenia profilu i powstania składowej emisyjnej linii.



Rysunek 7.6: Efekty uwzględnienia linii i NLTE w modelach atmosfer gwiazd gorących. Znaczne różnice temperatur w cienkich warstwach mają duży wpływ na natężenia linii ale nie na widmo ciągłe.

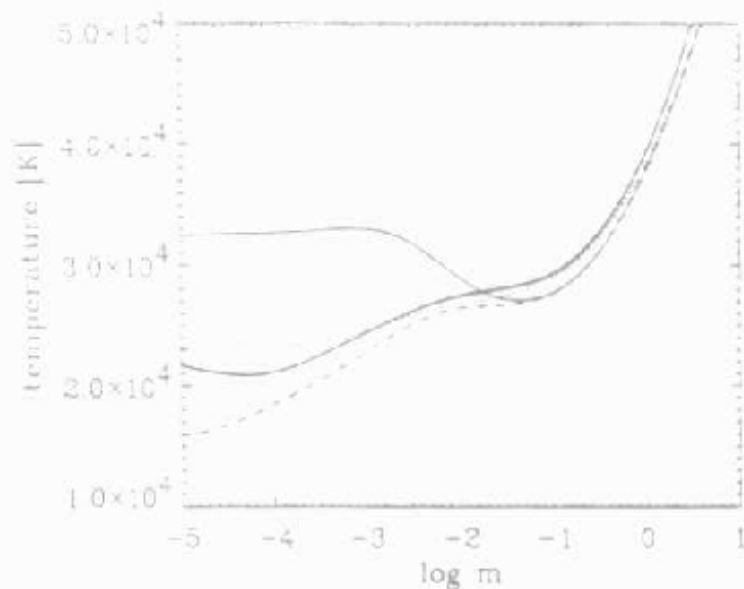


Fig. 6. Temperature structure for four model atmospheres with the same parameters: $T_{\text{eff}} = 35\,000\text{ K}$, $\log g = 4$. Thick line: fully blanketed NLTE H-He-C-N-O-Si-Fe-Ni model; dashed line: NLTE model with light elements (H-He-C-N-O-Si); thin line: NLTE H-He model; dotted line: LTE H-He model.

Rysunek 7.7: Efekty NLTE oraz przesłaniania (blanketingu) w modelu atmosfery bardzo gorącej gwiazdy typu O. W głębi widoczna jest rola domieszkowych pierwiastków, które dzięki słabym ale bardzo licznym liniom zwiększają blanketting. Na zewnątrz głównym efektem pierwiastków domieszkowych jest zwiększenie chłodzenia przez emisję w liniach i obniżenie temperatury, podobnie jak było na poprzednim rysunku.

7.2.1 Synteza widm

Pojęciowo synteza widm sprowadza się do obliczenia rozwiązania formalnego równania transferu. Jednak by to uczynić musimy najpierw mieć wiarygodny pełny model atmosfery z którego będziemy czerpać funkcje konieczne do obliczenia S_ν i τ_ν . Dla LRT sytuacja jest prostsza, wystarczy $T(\tau)$, $\rho(\tau)$ oraz $\kappa_\nu(T, \rho)$. Dla NLRT może być potrzebne pole promieniowania $J_\nu(\tau)$ oraz szczegółowe obsadzenie stanów, poziomów jonizacji etc, praktycznie większość parametrów modelu. W pełnym modelu atmosfery musimy uwzględniać tylko te pierwiastki i te silne linie widmowe które mają wpływ na całkowity transport energii i równowagę promienistą. W przypadku syntezy odpadają iteracje, bo rozkład temperatury jest wzięty z modelu, natomiast potrzebna jest znacznie bardziej szczegółowa tabela nieprzezroczystości z uwzględnieniem rzadszych pierwiastków i słabszych linii, które jednak mogą mieć istotne znaczenie w wyglądzie danego kawałka widma, choć nie mają wpływu na całkowity transport energii.

Możliwe są trzy sposoby postępowania:

Gotowe modele Do oszacowań ogólnych własności widma ciągłego i natężenia (ale nie kształtu) najsilniejszych linii mogą wystarczyć siatki gotowych policzonych modeli. Przykładem są modele LTE Kurucza, policzone dla wielu wartości $\log T_e$ oraz $\log g$ i dla kilku typowych składów chemicznych. Te modele są dostępne m.in. poprzez sieć internet.

Generatory widm syntetycznych Dla bardziej wyszukanych zastosowań, analizy składu chemicznego i porównania szczegółowego kształtu widma trzeba użyć generatora syntetycznych widm. W powszechnym użytku są dwa takie generatory SYNTH - Kurucz'a oraz SYNSPEC Hubeny'ego. Umożliwiają one dopasowanie składu chemicznego tych pierwiastków które nie dają dużego wkładu do transportu promieniowania. Te programy pracują w oparciu o modele policzone n.p. wyliczonymi poniżej programami.

Obliczenie pełnego modelu Dla dokładnej analizy wartości składu chemicznego podstawowych pierwiastków: n.p. H, He, C, N, O oraz dla uwzględnienia efektów NLRT w silnych liniach konieczne jest policzenie własnych modeli atmosfer. Dostępne w tym celu są programy ATLAS Kurucza lub TLUSTY Hubenyego. Chociaż są to gotowe programy, to ich poprawne uruchomienie i użycie wymaga czasu i zdobycia pewnej wiedzy podstawowej, a także stanowi niebagatelne obciążenie komputera. Wreszcie dla niektórych zagadnień potrzebna jest albo w'lasna modyfikacja programu albo współpraca z autorami specjalistycznych programów, n.p. do liczenia atmosfer gorących gwiazd z uwzględnieniem silnego wiatru gwiazdowego.

7.2.2 Porównanie Teorii z Teorią

Czasem zamiast porównania modeli z obserwacjami porównuje się jeden model teoretyczny z innym. Cele mogą być dwa: weryfikacja rachunków, wówczas drugi model jest prostszym modelem który stanowi rodzaj wzorca do testowania jakości rachunków, n.p. dla modeli NLTE takim wzorcem jest model atmosfery izotermicznej z silnym rozpraszaniem. Inne zastosowanie to weryfikacja roli nowo uwzględnionych procesów fizycznych w atmosferze.

7.2.3 Fundamentalne parametry gwiazd

Ocena fundamentalnych parametrów gwiazd opiera się na 3 zależnościach

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad L = L(m, d) \quad (7.2)$$

gdzie L i m oznaczają jasność (moc) absolutną i obserwowaną gwiazdy, R jej promień, T_e temperaturę efektywną, M masę a d jest odległością. Dopasowując model atmosfery do obserwacji można znaleźć T_e oraz g a z obserwacji fotometrycznych m . Mamy 4 nieznane parametry L, M, R, d oraz tylko 3 zależności. Trzeba sztukować informacje, posiłkując się pewnymi zależnościami, jak n.p. dla gwiazd na ciągu głównym, $M - R$ dla białych karłów lub $M - L$ dla gorących jąder mgławic planetarnych. O ile te zależności są sprawdzone to sęk w tym, że nigdy do końca nie jesteśmy pewni czy stosują się akurat do danej gwiazdy. Potrzebna jest dodatkowa informacja. Dla bliskich gwiazd radykalna poprawa nastąpiła wskutek pomiaru paralaks i odległości d przez satelitę Hipparchos.

Literatura

Anderson ***

Collins, G.W., 1989, The Fundamentals of Stellar Astrophysics, Freeman.

Hubeny, I. Stellar Atmospheres, European Astrophysics Doctoral Network 9th Summer School, http://***

Kurucz, R. A grid of stellar atmosphere models

Lifshitz E.M. i Pitajewski L.P. 1993, Kinetyka fizyczna, tom 10 kursu Landaua, Warszawa, PWN

Press i in. 1992, Numerical Recipes, Cambridge, CUP.

Ralston, A. 1971, Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa, PWN, i 1965, A
First Course in Numerical Analysis, New York, McGraw-Hill

Rutten Radiative Transfer in Stellar Atmospheres, <http://www.astro.uu.nl/~rutten/tmr>

Rybicki, G. i Hummer, D. (1991)

Stepien, K. Fizyka Atmosfer, Uniw. Warsz., skrypt