Astronomia sferyczna
Wykład 12: MIEJSCA ŚREDNIE, PRAWDZIWE I WIDOME

Tadeusz Jan Jopek

Obserwatorium Astronomiczne, UAM

Semestr II

(Uaktualniono 2015.06.01)

Część I

MIEJSCA ŚREDNIE, PRAWDZIWE I WIDOME

Wstęp

Współrzędne gwiazd ulegają zmianom z różnych powodów. Najważniejszymi przyczynami są: ruch własny, precesja i nutacja, aberracja oraz paralaksa. Zjawiska te mają różną naturę, co nie przeszkadza w napisaniu jednego równania łączącego ich sumaryczny wpływ. Takiego równania będziemy poszukiwali w ramach niniejszego wykładu.

Niech dla pewnej gwiazdy dana będzie para współrzędnych (α, δ). Aby informacja ta była przydatna, musimy albo domyślnie, albo explicite posiadać dodatkowe informacje pozwalające odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Jakiej dacie podane (α, δ) odpowiadają?
2. Gdzie znajduje się początek układu odniesienia, względem którego (α, δ) są zdefiniowane?
3. W jaki sposób wybrano równik i równonoc układu współrzędnych?

Data, o którą pytamy w punkcie (1) jest momentem obserwacji, momentem efemerydy, epoką układu odniesienia. Jeżeli jest nieznana podane współrzędne mają niewielką wartość.

Wstęp cd

Początek układu współrzędnych czyli środek sfery niebieskiej, ustala konkretną klasę układu odniesienia. Mamy tu kilka możliwości ale najważniejsze są układy określone względem barycentrum Układu Słonecznego oraz układ geocentryczny.

Transformacja pomiędzy tymi układami polega na wprowadzeniu poprawek z tytułu rocznej aberracji i rocznej paralaksy. Pozostałe drobne efekty jak relatywistyczne ugięcie światła czy drugiego rzędu wyrazy aberracyjne, zwykle nie bedą nas interesowały.

W praktyce najczęściej stosowanymi układami są układy oparte o średnie równik i równonoc oraz o prawdziwe równik i równonoc odpowiadające tej samej epoce.

Układy średnie to układy różniące się jedynie precesją, układy średnie i prawdziwe dodatkowo różnią się o nutację. Ale w każdym z nich epoka równika i równonocy może (ale nie musi) być identyczna z momentem czasu (z datą), na który podane są współrzędne (α, δ).

Terminologia

Możliwości wyboru najrozmaitszych układów odniesienia jest zatem cały legion, dlatego przydatna będzie standaryzacja, co pociąga konieczność ustalenia terminologii, sformułowania definicji etc.

Poniżej podajemy niektóre z nich.

- Miejsce średnie, współrzędne średnie.
- Standardowe miejsce średnie.
- Miejsce prawdziwe (locus verus), współrzędne prawdziwe.
- Miejsce widome (locus apparens), współrzędne widome.

Miejsce średnie

Miejsce średnie, współrzędne średnie.

Miejsce średnie (α_1, δ_1) gwiazdy, określone jest za pomocą współrzędnych na sferze barycentrycznej (barycentrum Układu Planetarnego) wyznaczone względem średniego równika i równonocy daty.

Sformułowanie to oznacza, że epoka równika i punktu równonocy oraz data obserwacji są identyczne.

Od średnich współrzędnych gwiazdy podanych na inne epoki, współrzędne (α_1, δ_1) różnią się jedynie zmianami powodowanymi precesją i ruchem własnym.

Ponieważ są to współrzędne barycentryczne, nie ma tu sensu pytanie o zmiany z powodu zjawiska aberracji, paralaksy rocznej.

Standardowe miejsce średnie.

Standardowe miejsce średnie (α_0, δ_0) gwiazdy są to współrzędne średnie na moment czasu równy epoce standardowej.

Epoką standardową jest najczęściej epoka B1950.0 lub J2000.0. Położenia gwiazd podane w katalogach są to standardowe miejsca średnie.

Miejsce prawdziwe

Miejsce prawdziwe (locus verus), współrzędne prawdziwe.

Miejsce prawdziwe (α_2, δ_2) gwiazdy określają jej współrzędne na sferze barycentrycznej odniesione do prawdziwego równika i równonocy daty.

W stosunku do miejsc średnich na daną epokę, w miejscach prawdziwych dodatkowo uwzględniono nutację.

Jako takie, miejsca te nie mają szerszego zastosowania, najczęściej stanowią krok pośredni w transformacji od miejsca średniego do miejsca widomego.

Miejsce widome

Miejsce widome (locus apparens), współrzędne widome.

Współrzędne widome (α, δ) gwiazdy są współrzędnymi geocentrycznymi, odniesionymi do prawdziwego równika i równonocy daty.

Przejście od miejsca prawdziwego miejsca widomego wymaga wyznaczenia poprawki na aberrację roczną i paralaksę roczną.

Od położenia obserwowanego (locus observatus), lucus apparens gwiazdy różni się jedynie lokalnymi wpływami refrakcji i aberracji dobowej.

Zmiany roczne i widome

Załóżmy, że interesuje nas widome miejsce gwiazdy na pewien moment czasu oddalony o $(t+\tau)$ lat od epoki standardowej, przy czym $(t-0.5)$ jest liczbą całkowitą dobraną tak, że pozostały ułamek τ należy do przedziału $-0.5 < \tau < 0.5$.

Przy takich założeniach obliczymy najpierw współrzędne średnie na moment t lat po epoce standardowej. Współrzędne te (α_1, δ_1) można rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu wartości (α_0, δ_0) z epoki standardowej. Ograniczając się do trzech pierwszych wyrazów, mamy:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 \cdot t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 \cdot t^2 \\
\delta_1 &= \delta_0 + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 \cdot t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 \cdot t^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

W niektórych katalogach gwiazd, obok (α_0, δ_0) podane są także wartości tych pochodnych. Pierwsze pochodne nazywane są zmianami rocznymi w rektascensji i deklinacji, variatio annua. Pochodne drugie noszą miano variatio saecularis.

Zmiany roczne

Ponieważ brane są pod uwagę jedynie precesja i ruch własny, zmiany roczne możemy warazić za pmoca przybliżonych formuł precesyjnych:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 &= m + \frac{1}{15} n \sin\alpha_0 \tan\delta_0 + \mu_\alpha \\
\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 &= n\cos\alpha + \mu_\delta
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Oczywiście, składowe ruchu własnego (μ_α, μ_δ) oraz stałe precesyjne (m, n) oszacowane są na epokę standardową.

W katalogach zmiany roczne podano w sekundach czasu na rok (sek/rok) i w sekundach łuku na rok ($''/rok$), odpowiednio.

Zmiany wiekowe (variatio saecularis)

Drugie pochodne w (1) są bardzo małe. W katalogach podane są w formie zmian wiekowych (s_α, s_δ) w rektascensji i deklinacji. Definiowane są jako szybkości zmian na stulecie odpowiednich zmian rocznych:

$$
\begin{aligned}
s_\alpha &= 100 \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 \\
s_\delta &= 100 \cdot \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Wyznaczenie zmian wiekowych jest dość złożone. Różniczkując (2) mamy w odpowiednich jednostkach:

$$
\begin{aligned}
s_\alpha &= 100\left(\frac{dm}{dt} + \frac{1}{15}\frac{dn}{dt}\sin\alpha_0\tan\delta_0 + \frac{d\mu_\alpha}{dt} + n\cos\alpha_0\tan\delta_0\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 \sin 1'' + \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{15} n\sin\alpha_0 \sec^2\delta_0\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 \sin 1''\right) \\
s_\delta &= 100\left(\frac{dn}{dt}\cos\alpha_0 + \frac{d\mu_\delta}{dt} - 15 n\sin\alpha_0\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 \sin 1''\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Miejsca średnie gwiazd

W równaniach (4) złożoność rachunków jest częściowo zamaskowana, np. szybkość zmian składowych ruchu własnego wymaga wielu oddzielnych wyrazów.

Ostateczne formuły pozwalające wykorzystać dane katalogowe są już bardzo proste. Zgodnie z równaniem (1) współrzędne średnie na epokę t lat od epoki standardowej katalogu obliczymy za pomocą:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_0 + t \cdot \left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 + \frac{s_\alpha \cdot t}{200}\right] \\
\delta_1 &= \delta_0 + t \cdot \left[\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 + \frac{s_\delta \cdot t}{200}\right].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Równanie (5) można udokładnić dodając wyrazy trzeciego rzędu co dla niektórych gwiazd jest konieczne.

Miejsca prawdziwe gwiazd

Formuły na współrzędne (α_1, δ_1) wyprowadzone powyżej, dają miejsca średnie na środek roku, najbliższy wymaganemu momentowi czasu.

Krok następny ma na celu obliczenie miejsca prawdziwego (α_2, δ_2) na datę $(t+\tau)$. W tym celu wymagana jest dalsza poprawka na precesję i ruch własny w interwale τ oraz włączenie nutacji. Mamy więc:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta\alpha_1 \\
\delta_2 &= \delta_1 + \Delta\delta_1 .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Wykorzystując wyrażenia na zmiany nutacyjne współrzędnych równikowych, biorąc jeszcze raz wzory (2), otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= \frac{1}{15} m\tau + \frac{1}{15} n\tau\sin\alpha_1\tan\delta_1 + \mu_\alpha\tau + \frac{\Delta\psi}{15}(\cos\varepsilon + \\
&\qquad \sin\varepsilon\sin\alpha_1\tan\delta_1) - \frac{\Delta\varepsilon}{15}\cos\alpha_1\tan\delta_1 \\
\Delta\delta_1 &= n\tau\cos\alpha_1 + \mu_\delta\tau + \Delta\psi\sin\varepsilon\cos\alpha_1 + \Delta\varepsilon\sin\alpha_1 .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

gdzie $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ są nutacją w długości i w nachyleniu obliczonymi na wymagany moment czasu $(t+\tau)$.

Miejsca prawdziwe gwiazd cd

Przegrupowując wyrazy w równaniu (7) można uzyskać postać korzystniejszą z punktu widzenia złożoności obliczeń.

W szczególności warto rozdzielić składniki zależne od wymaganej daty, czyli $\tau, \Delta\psi, \Delta\varepsilon$ od tych, które zależą od współrzędnych gwiazdy.

Wcześniej wyeliminujemy ε nachylenie ekliptyki do równika. Z równań z rozdziału dotyczącego zjawiska precesji można otrzymać:

$$
\cos\varepsilon = \frac{m+\lambda'}{\psi}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{n}{\psi}, \tag{8}
$$

gdzie λ' jest roczną zmianą w rektascensji z tytułu precesji planetarnej. Kładąc (8) do (7), po drobnej redukcji będziemy mieli:

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= n\left(\tau + \tfrac{\Delta\psi}{\psi}\right)\tfrac{1}{15}\left(\tfrac{m}{n} + \sin\alpha_1\tan\delta_1\right) - \tfrac{\Delta\varepsilon}{15}\cos\alpha_1\tan\delta_1 + \tfrac{\lambda'\Delta\psi}{15\psi} + \tau\mu_\alpha \\
\Delta\delta_1 &= n\left(\tau + \tfrac{\Delta\psi}{\psi}\right)\cos\alpha_1 + \Delta\varepsilon\sin\alpha_1 + \tau\mu_\delta .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Liczby dzienne i stałe gwiazdowe Bessela

Dokonując podstawień:

$$
\begin{aligned}
A &= n\left(\tau + \tfrac{\Delta\psi}{\psi}\right) \\
B &= -\Delta\varepsilon \\
E &= \tfrac{\lambda'\Delta\psi}{\psi}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{15}\left(\tfrac{m}{n} + \sin\alpha_1\tan\delta_1\right) \\
b &= \tfrac{1}{15}\cos\alpha_1\tan\delta_1 \\
a' &= \cos\alpha_1 \\
b' &= -\sin\alpha_1
\end{aligned}
\tag{11}
$$

i wprowadzając je do równań (9), formuły na współrzędne prawdziwe gwiazdy na moment $(t+\tau)$ przyjmą postać

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + Aa + Bb + E \\
\delta_2 &= \delta_1 + \tau\mu_\delta + Aa' + Bb'
\end{aligned}
\tag{12}
$$

A, B, E są liczbami dziennymi Bessel'a. Są niezależne od współrzędnych gwiazd ale szybko zmieniają się w czasie. Liczby te łącznie z wartościami τ stabelaryzowano w *Astronomical Almanac*

a, b, a', b' to stałe gwiazdowe Bessel'a. Nie są to stałe absolutne, gdyż współrzędne gwiazd oraz wielkości m i n powoli zmieniają się. Pomijając te efekty, stałe gwiazdowe obliczane są biorąc standardowe miejsca średnie co pozwala na włączenie ich do katalogu gwiazd. Podejście to nie gwarantuje wysokiej precyzji, dlatego stałe gwiazdowe należy odświeżać na początek roku danego momentu czasu.

Niezależne liczby dzienne

Równanie (12) ma postać alternatywną nie zawierającą stałych gwiazdowych. Zamiast nich, w sposób jawny występują rektascensja i deklinacja. Upraszczając za pomocą (10) równanie (9) mamy:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \tfrac{1}{15}\tfrac{mA}{n} + E + \tfrac{1}{15}(A\sin\alpha_1 + B\cos\alpha_1)\tan\delta_1 + \tau\mu_\alpha \\ \Delta\delta_1 &= A\cos\alpha_1 - B\sin\alpha_1 + \tau\mu_\delta. \end{aligned} \tag{13}$$

Oznacając:

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{15}\tfrac{mA}{n} + E \\ g\sin G &= B \\ g\cos G &= A, \end{aligned} \tag{14}$$

prawdziwe współrzędne gwiazdy dane są jako:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + f + \tfrac{1}{15} g\sin(G+\alpha_1)\tan\delta_1 \\ \delta_2 &= \delta_1 + \tau\mu_\delta + g\cos(G+\alpha_1) \end{aligned} \tag{15}$$

Wielkości f, g, G nazwano niezależnymi liczbami dziennymi. f wyrażone jest w sekundach czasu, g w sekundach łuku. Liczby niezależne publikowano w *Astronomical Almanac*, ale od roku 1981 przestano je tam zamieszczać.

Miejsca widome gwiazd

Współrzędne widome gwiazdy (α, δ) różnią się od miejsc prawdziwych o roczną aberrację i roczną paralaksę.

Oznaczmy różnicę pomiędzy nimi przez $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha - \alpha_2 \\ \Delta\delta &= \delta - \delta_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Różnice współrzędnych zależą od składowych wektorów położenia (X, Y, Z) i prędkości $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ Ziemi (patrz wykład o współrzędnych heliocentrycznych), mianowicie:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \tfrac{1}{15}(\tfrac{\dot{Y}}{c} - \pi Y)\cos\alpha\sec\delta - \tfrac{1}{15}(\tfrac{\dot{X}}{c} - \pi X)\sin\alpha\sec\delta \\ \Delta\delta &= -(\tfrac{\dot{Y}}{c} - \pi Y)\sin\alpha\sin\delta - (\tfrac{\dot{X}}{c} - \pi X)\cos\alpha\sin\delta + (\tfrac{\dot{Z}}{c} - \pi Z)\cos\delta \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie π jest paralaksą gwiazdy, c prędkością światła w $AU/doba$.

Miejsca widome gwiazd cd

Równanie (17) można przekształcić do postaci zawierającej liczby dzienne i stałe gwiazdowe. Zanim to uczynimy, zwróćmy uwagę na kilka istotnych punktów.

Po pierwsze, w prawych stronach równań (17) nie można położyć współrzędnych widomych gwiazd, bowiem nie zostały one jeszcze policzone. W tej sytuacji, najbardziej naturalnym byłoby zamiast widomych wstawienie współrzędnych prawdziwych (α_2, δ_2).

Jest to jednak utrudnione, gdyż współrzędne te zostaną zaabsorbowane przez stałe gwiazdowe, a te z kolei powinny być niezależne od daty. Na szczęście, z dostateczną precyzją możemy tu zastosować współrzędne średnie (α_1, δ_1) odpowiadające środkowi roku.

Podobne uwagi dotyczą składowych wektorów położenia i prędkości Ziemi. W sytuacji idealnej powinny one być odniesione do prawdziwego równika i równonocy daty, ale okazuje się, że średni równik i równonoc na środek roku są zupełnie wystarczające. Składowe te są włączone w nowe liczby dzienne podane na każdy dzień w *Astronomical Almanac*.

Miejsca widome gwiazd uproszczenia

Poprawka paralaktyczna tkwiąca w równaniu (17) jest wielkością charakterystyczną dla każdej gwiazdy i dlatego nie może być włączona do liczb dziennych.

Składowe (X, Y, Z) wektora położenia Ziemi są stabelaryzowane w *Astronomical Almanac* jako współrzędne średnie standardowe. Ponieważ poprawka paralaktyczna jest znacznie mniejsza od aberracyjnej, z wystarczającą dokładnością możemy wykorzystywać te wielkości.

Równanie (17) daje się uprościć przez wyeliminowanie w nim składowej z-towej wektorów położenia i prędkości Ziemi. Zakładając, że Ziemia leży dokładnie w płaszczyźnie ekliptyki na długości λ, wówczas jej równikowy wektor położenia wynosi

$$\mathbf{R} = R(\cos\lambda, \sin\lambda\cos\varepsilon, \sin\lambda\sin\varepsilon)$$

i stąd

$$\begin{aligned} Z &= Y\tan\varepsilon \\ \dot{Z} &= \dot{Y}\tan\varepsilon \end{aligned} \tag{18}$$

Nowe liczby i stałe Bessela

Dzięki takiemu zabiegowi liczba równań na liczby dzienne może zostać zredukowana z trzech do dwóch. Kładąc do równania (17) zamiast (α, δ) wartości współrzędnych średnich (α_1, δ_1) otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{15}\cos\alpha_1\sec\delta_1\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right) - \sin\alpha_1\sec\delta_1\left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right) \\ \Delta\delta &= (\tan\varepsilon\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta_1)\left(\frac{\dot{Y}}{c} - \pi Y\right) - \cos\alpha_1\sin\delta_1\left(\frac{\dot{X}}{c} - \pi X\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} C &= \dot{Y}/c \\ D &= -\dot{X}/c \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{15}\cos\alpha_1\sec\delta_1 \\ d &= \tfrac{1}{15}\sin\alpha_1\sec\delta_1 \\ c' &= \tan\varepsilon\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta_1 \\ d' &= \cos\alpha_1\sin\delta_1 \end{aligned} \tag{21}$$

Nowe liczby i stałe Bessela

Wielkości C, D są nowymi liczbami dziennymi Bessel'a, zostały one stabelaryzowane z krokiem jednodniowym w *Astronomical Almanac*. Wielkości c, d, c', d' są to stałe gwiazdowe Bessel'a. W takiej notacji, równanie (19) można napisać w formie:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= (C - \pi Y)c + (D + \pi X)d \\ \Delta\delta &= (C - \pi Y)c' + (D + \pi X)d'. \end{aligned} \tag{22}$$

Kiedy paralaksa gwiazdy jest dostatecznie mała, można włączyć ją do stałych gwiazdy czyniąc założenie o kołowej orbicie Ziemi. Wówczas wektory położenia i prędkości Ziemi dane są jako

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot, 0) \\ \dot{\mathbf{R}} &= \kappa c(\sin\lambda_\odot, -\cos\lambda_\odot, 0) \end{aligned}$$

gdzie κ jest stałą aberracji, $\lambda_\odot$ jest długością ekliptyczną Słońca. W układzie równikowym składowe te wynoszą

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (-\cos\lambda_\odot, -\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon, -\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon) \\ \dot{\mathbf{R}} &= \kappa c(\sin\lambda_\odot, -\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon, -\cos\lambda_\odot\sin\varepsilon) \end{aligned} \tag{23}$$

Nowe liczby i stałe Bessela

Zauważmy, że tutaj aberracja roczna jest traktowana dokładnie. Operujemy przybliżoną prędkością Ziemi ale przybliżenie to dotyczy wyłącznie poprawki paralaktycznej, bowiem z równań (23) mamy

$$\begin{aligned} X &= \frac{\dot{Y}\sec\varepsilon}{\kappa c} = \frac{C\sec\varepsilon}{\kappa} \\ Y &= \frac{-\dot{X}\cos\varepsilon}{\kappa c} = \frac{D\cos\varepsilon}{\kappa} \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie C, D dane są równaniami (20). Kładąc X, Y do równań (22) mamy

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= C\left(c + \frac{\pi d\sec\varepsilon}{\kappa}\right) + D\left(d - \frac{\pi c\cos\varepsilon}{\kappa}\right) \\ \Delta\delta &= C\left(c' + \frac{\pi d'\sec\varepsilon}{\kappa}\right) + D\left(d' - \frac{\pi c'\cos\varepsilon}{\kappa}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Miejsca widome, przybliżenia

Skompresowaną postać tych równań uzyskamy w podobny sposób do stosowanego wcześniej.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= Cc_1 + Dd_1 \\ \Delta\delta &= Cc_1' + Dd_1' \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_1 &= c + 0.0532 d\pi \\ d_1 &= d - 0.0448 c\pi \\ c_1' &= c' + 0.0532 d'\pi \\ d_1' &= d' - 0.0448 c'\pi \end{aligned} \tag{27}$$

są nieco zmodyfikowanymi stałymi gwiazdowymi, w które włączono przyczynek od paralaksy rocznej.

Wartości tych stałych obliczone są raz na zawsze i wykorzystywane w równaniu (26).

Równanie to jest jednak jedynie uproszczeniem w stosunku do bardziej dokładnego równania (22). Wynikające stąd błędy można uważać za zaniedbywalne jeżeli $\pi < 0.2''$.

Od miejsca średniego do widomego, formuła łączna

Poprawki dane równaniami (22) i (12) można połączyć w jedną formułę, gdyż nie mamy żadnej potrzeby obliczania explicite miejsca prawdziwego. I tak, wychodząc od miejsca średniego (α_1, δ_1) na moment odpowiadający środkowi roku mamy, że miejsce widome (α, δ) dane jest formułą:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \tau\mu_\alpha + Aa + Bb + (C - \pi Y)c + (D + \pi X)d + E \\ \delta &= \delta_1 + \tau\mu_\delta + Aa' + Bb' + (C - \pi Y)c' + (D + \pi X)d' \end{aligned} \tag{28}$$

Równania (28) są pierwszego rzędu, wystarczająco dokładnymi w większości zastosowań.

Jeśli jest taka potrzeba, liczby dzienne można rozszerzyć przez dołączenie efektów rzędu drugiego, które mogą być znaczące zwłaszcza dla dużych deklinacji.

W praktyce zalecanej w *Astronomical Almanac*, w równaniach (28) dodaje się człon $J \tan^2 \delta_1$ w rektascensji i $J' \tan^2 \delta_1$ w deklinacji. Wielkości J oraz J' zwane są liczbami dziennymi rzędu drugiego. Są one zależne od współrzędnych gwiazd i zostały stabelaryzowane w *Astronomical Almanac* w funkcji czasu i rektascensji.

Liczby dzienne rzędu drugiego, uwagi

W *Astronomical Almanac* nie podano dla wszystkich gwiazd wyrazów rzędu drugiego, jedynie te, które są najbardziej znaczące.

Liczby dzienne rzędu drugiego stosuje się w celu zmniejszenia błędów systematycznych, które stają się znaczące zwłaszcza dla dużych deklinacji. Przyczyną są tu osobliwości w układzie współrzędnych równikowych w okolicy biegunów niebieskich. Trudności tych można uniknąć stosując wektorowe podejście zawsze rekomendowane jeśli formuły (28) okażą się niewystarczające.

Na jednym z wykładów mówiliśmy o tzw. członach E aberracji rocznej. Ponieważ powszechną praktyką było pozostawianie tych członów w katalogowych położeniach gwiazd, dlatego aż do 1984 roku wartości składowych prędkości odpowiedzialne za ten efekt były usuwane ze składowych $\dot{X}$ i $\dot{Y}$ przed obliczeniem aberracyjnych liczb dziennych.

Obecnie zaniechano tego typu zabiegów, a zatem liczby C i D, obliczone są ściśle w oparciu o barycentryczne składowe prędkości Ziemi, tak jak to ma miejsce w przypadku równań (20).

Część II

PRZEMIANA MIEJSC, FORMALIZM WEKTOROWY

Ujęcie wektorowe

Omówimy inną technikę pozwalającą na przejście od miejsc średnich do widomych, różną od techniki liczb dziennych. Będzie to metoda dokładna, a więc lepsza, ale wymagająca bardziej żmudnych obliczeń.

Wychodzimy od standardowego miejsca średniego gwiazdy (α_0, δ_0) na epokę T_0, naszym celem jest miejsce widome (α, δ) na moment t lat późniejszy.

Weźmiemy w rachubę ruch własny, paralaksę, aberrację i w rezultacie otrzymamy prostokątne współrzędne geocentryczne na żądaną datę, ale nadal względem początkowego układu współrzędnych.

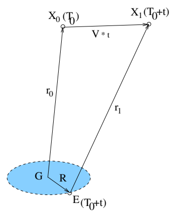
Zatem ostatni krok jaki jeszcze będzie trzeba wykonać to transformacja do układu opartego o prawdziwy równik i równonoc daty, a zatem uwzględnienie precesji i nutacji.

Niech $\mathbf{s}_0$ będzie wersorem określającym miejsce średnie gwiazdy w epoce T_0

$$\mathbf{s}_0 = (\cos\alpha_0 \cos\delta_0, \sin\alpha_0 \cos\delta_0, \sin\delta_0) \tag{29}$$

Zmodyfikujemy najpierw ten wersor uwzględniając wpływy czysto geometryczne ruchu własnego i paralaksy.

Formalizm wektorowy cd1



G oznacza barycentrum Układu Słonecznego, E położenie Ziemi w momencie $T_0 + t$ obserwacji gwiazdy.

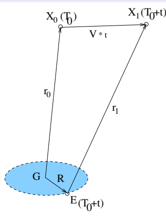
Punkty X_0 i X_1 oznaczają geometryczne położenia gwiazdy na epokę standardową i datę obserwacji.

Te cztery punkty niekoniecznie leżą w jednej płaszczyźnie, nie mamy intencji czegoś takiego sugerować.

Niech $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}$ oraz $\mathbf{R}$ będą wektorami barycentrycznych położeń punktów X_0, X_1 oraz E. Możemy zatem napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= r_0\mathbf{s}_0 \\ \mathbf{r}_1 &= r_1\mathbf{s}_1 \\ \mathbf{R} &= (XYZ) \end{aligned} \tag{30}$$

Formalizm wektorowy cd2



Załóżmy, że gwiazda ma prędkość $\mathbf{V}$ względem barycentrum. Z rysunku wynika, że

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}t - \mathbf{R} \tag{31}$$

Przy czym korzystamy tu z uzasadnionego założenia, że w interwale t, wektor $\mathbf{V}$ nie zmienia się.

Składowe wektora $\mathbf{R}$ (położenie geocentrum E) podane są w rocznikach w [JA].

Katalogi dostarczają następujących informacji podanychh względem eppoki standardowej:

- standardowe miejsce średnie (α_0, δ_0),
- składowe ruchu własnego (μ_α, μ_δ),
- paralaksa roczna π,
- szybkość radialna V_r (km/s).

Formalizm wektorowy paralaksa

Jeśli π wyrażono w radianach $r_0 = \pi^{-1}$ to (31) możemy napisać w postaci:

$$r_1\pi\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{m}t - \pi\mathbf{R} \tag{32}$$

gdzie $\mathbf{m}$ jest wektorem ruchu przestrzennego gwiazdy, $\mathbf{m} = \pi\mathbf{V}$.

Wektor $\mathbf{m}$ jest określony w radianach na rok, prędkość $\mathbf{V}$ gwiazdy tradycyjnie podaną w km/s trzeba wyrazić w AU/rok. Po zamianach mamy:

$$\mathbf{m} = \vec{\mu} + \frac{\pi}{4.74} V_r \mathbf{s}. \tag{33}$$

gdzie wektor ruchu własnego $\vec{\mu}$ jest wyrażony w radianach na rok.

Jeśli (μ_α, μ_δ) oraz π podane są w jednostkach praktycznych, to składowe wektora $\mathbf{m}$ dane są przez

$$\begin{aligned} m_x &= (-15\mu_\alpha \sin\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \cos\alpha_0 \sin\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4.74} \cos\alpha_0 \cos\delta_0) \sin 1'' \\ m_y &= (-15\mu_\alpha \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \mu_\delta \sin\alpha_0 \sin\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4.74} \sin\alpha_0 \cos\delta_0) \sin 1'' \\ m_z &= (\mu_\delta \cos\delta_0 + \frac{\pi V_r}{4.74} \sin\delta_0) \sin 1'' \end{aligned} \tag{34}$$

Formalizm wektorowy aberracja

Podstawiając te składowe do równania (32), otrzymamy (po unormowaniu do jedności) wersor $\mathbf{s_1}$ opisujący quasi geometryczny kierunek do wybranej gwiazdy na moment obserwacji $T_0 + t$.

Następnym krokiem jest wprowadzenie poprawki z tytułu aberracji. W jaki sposób zostanie to dokonane, zależy od tego czy uznamy podejście klasyczne za adekwatne, czy też nie. Jeśli tak, problem jest prosty. Gwiazda emituje kwanty o prędkości $\mathbf{V}_1$ względem barycentrum, czyli

$$\mathbf{V}_1 = -c\mathbf{s}_1$$

Względem poruszającej sie Ziemi prędkość ta wynosi

$$\mathbf{V}_2 = -c\mathbf{s}_1 - \dot{\mathbf{R}}$$

gdzie prędkość światła c jak i prędkość Ziemi $\dot{\mathbf{R}}$ wyrażone są w $AU/doba$. Poprawiony na aberrację kierunek dany jest jako wersor $\mathbf{s}_2$ za pomocą:

$$\frac{V_2}{c}\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 + 0.0057756\,\dot{\mathbf{R}} \tag{35}$$

Prawa strona tego równania nie jest wektorem jednostkowym, stąd aby otrzymać wersor $\mathbf{s}_2$ należy ją unormować do jedności.

Aberacje - człony E

Jeżeli katalog jakim dysponujemy podaje położenia gwiazd już poprawione na aberracyjne człony E, konieczna będzie pewna modyfikacja.

Trzeba wówczas prędkość $\mathbf{V_E}$, składową eliptyczną, odpowiedzialną za istnienie członów E odjąć od $\dot{\mathbf{R}}$ przed podstawieniem tego wektora do równania (35).

Prędkość $\mathbf{V}_E$, względem równika i równonocy 1950.0 ma składowe

$$\mathbf{V}_E = (-0.000281, -0.000055, -0.000024) \tag{36}$$

W przypadku katalogów bardziej współczesnych, których epoką podstawową jest J2000.0, modyfikacja ta nie jest potrzebna.

Miejsce prawdziwe

W kolejnym kroku transformujemy składowe wersora $\mathbf{s}_2$ do układu współrzędnych zdefiniowanego w oparciu o prawdziwy równik i równonoc daty.

W tym celu, na interesujący nas moment czasu musimy znać elementy macierzy obrotu $\mathbf{R}_M$, służącą do transformacji współrzednych z tytułu precesji i nutacji. Elementy macierzy można zaczerpnąć z *Astronomical Almanac* lub policzyć samemu w oparciu o formuły podane na wykładzie dotyczącym precesji i nutacji.

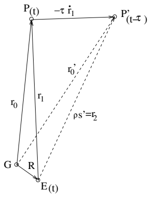
Wersor $\mathbf{s}$ gwiazdy odpowiadający miejscu widomemu otrzymamy za pomocą zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{R}_M\,\mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s} &= (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta) \end{aligned} \tag{37}$$

Za pomocą składowych wersora $\mathbf{s}$ znajdujemy współrzędne sferyczne α, δ gwiazdy.

Opisana wyżej technika wektorowa jest dokładna w ramach podejścia klasycznego.

Wektorowa przemiana do miejscego widomego planety



W przypadku planety (komety ...) zastępujemy ruch własny ruchem orbitalnym, utrzymując założenie o stałości prędkości obiektu.

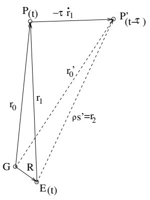
Mamy zatem następujący problem: dana jest barycentryczna efemeryda planety na pewien moment czasu t, należy wyznaczyć widome miejsce planety na ten sam moment.

Załóżmy, że efemerydę planety podano w postaci składowych (x_0, y_0, z_0) określonych względem standardowego średniego równika i równonocy. Barycentryczny wektor położenia planety P na moment t ma postać:

$$\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{s}_0 = (x_0, y_0, z_0). \tag{38}$$

Wektor $\mathbf{r}_0$ określa położenie punktu P. Wektor $\mathbf{R}$ określa położenie punktu E centrum Ziemi na ten sam moment t. Położenie planety P' odpowiada chwili kiedy nastąpiła emisja fotonu rejestrowanego w E w momencie t. Wektor kierunku przyjścia fotonu względem E oznaczymy przez $\rho\mathbf{s}'$.

Wektorowa przemiana do miejscego widomego planety cd1



Klasyczne rozwiązanie naszego problemu jest bardzo proste. Jest ono równoważne transformacji do układu geocentrycznego, po której wprowadzić należy poprawkę za aberracją planetarną, a następnie dokonać przejścia do prawdziwego równika i równonocy.

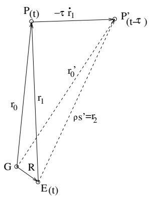
Geocentryczny wektor $\mathbf{r}_1$ planety P:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{R}. \tag{39}$$

Jest to dokładna formuła. Aby wprowadzić poprawkę na aberrację planetarną trzeba znać czas propagacji τ. Ściśle, należałoby go obliczyć jako ρ/c, ale w klasycznym podejściu wystarczająco dokładne będzie przybliżenie:

$$\tau = \frac{|\mathbf{r}_1|}{c}. \tag{40}$$

Wektorowa przemiana do miejscego widomego planety cd2



Widome współrzędne planety na moment t są równoważne współrzędnym geometrycznym na moment $(t - \tau)$. Taka zmiana oddaje w całości efekty pierwszego rzędu pochodzące od ruchu planety i Ziemi. Widomy wektor geocentryczny planety $\mathbf{r}_2$ można obliczyć jako

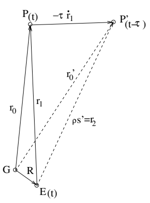
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + (-\tau\dot{\mathbf{r}}_1). \tag{41}$$

Składowe wektora $\dot{\mathbf{r}}$ otrzymamy obliczając pochodne równania (39).

Wyrażając prędkość w $AU/doba$, z uwzględnieniem (40), równanie (41) można napisać w postaci

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - 0.00057756\,\frac{r_1}{c}(\dot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\mathbf{R}}) \tag{42}$$

Wektorowa przemiana do miejscego widomego planety cd3



Miejsce widome planety otrzymamy jeżeli średni geocentryczny wektor $\mathbf{r}_2$ wyrazimy względem prawdziwego równika i równonocy daty.

Za pomocą macierzy obrotu $\mathbf{R}_M$ (precesja i nutacja) miejsce widome $\mathbf{s}$ dane jest jako

$$r\mathbf{s} = \mathbf{r} = \mathbf{R}_M\mathbf{r}_2 \tag{43}$$

Po unormowaniu prawej strony, otrzymamy wersor $\mathbf{s}$, a dalej łatwo obliczyć współrzędne sferyczne planety (α, δ) na zadany moment t.

Część III

KATALOGI GWIAZDOWE POŁOŻENIOWE

Katalogi absolutne i fundamentalne

Koło południkowe umożliwia pomiar współrzędnych położenia gwiazdy bez korzystania z wcześniejszych pomiarów położeń innych gwiazd.

Termin pomiar absolutny stosowany jest do takich właśnie pomiarów, w celu odróżnienia od pomiarów względnych. Katalogi, w których zestawiono rezultaty pomiarów absolutnych noszą miano katalogów absolutnych.

Musimy jednak odróżnić dwa rodzaje katalogów absolutnych. Katalogi obserwacyjne podające położenia gwiazd wyznaczone przez jedno obserwatorium, obejmują stosunkowo krótki interwał czasu.

Natomiast katalog absolutny fundamentalny (General Catalogue), skonstruowany jako kompilat z wielu katalogów obserwacyjnych z wielu obserwatoriów rozciąga się na wyraźnie większy okres czasu.

Katalogi fundamentalne zawierają miejsca średnie wybranych gwiazd wraz ze zmianami współrzędnych powstałych w wyniku precesji i ruchu własnego (zmiany roczne i wiekowe). Katalog taki definiuje układ odniesienia.

Równonoc katalogowa i dynamiczna

Współrzędnych gwiazd podane są względem równika i równonocy, tak jak gdyby równik i punkt Υ można było zaobserwować na niebie. A przecież jedyną obserwowaną rzeczywistością są gwiazdy.

I tak naprawdę to katalogowe położenie gwiazdy definiuje równik i równonoc. Średni równik i równonoc na epokę standardową zdefiniowane są implicite poprzez rektascensje i deklinacje gwiazd z katalogu fundamentalnego. Katalogowe wartości zmian rocznych i wiekowych pozwalają rozciągać tę definicję na inne epoki.

Ustalony taką drogą układ odniesienia jest układem rotującym (precesja). Poruszająca się równonoc takiego układu nazywana jest równonocą katalogową.

Implicite, równonoc jest definiowana jako zerowy punkt rachuby rektascensji. Punkt ten można by w zasadzie wybrać zupełnie dowolnie, ale tradycyjnie obierano go tak by leżał możliwie blisko punktu przecięcia chwilowej orbity Ziemi i niebieskiego równika.

Ten drugi punkt równonocy, nazywany jest równonocą dynamiczną.

Fundamentalny układ odniesienia

Różnica pomiędzy nimi jest niewielka, ale mimo to trzeba odróżnić idealizację równonocy dynamicznej od jej praktycznej realizacji jako punktu zerowego fundamentalnego układu odniesienia. Wynikająca stąd różnica w rektascensji nazywana jest poprawką punktu równonocy.

Stała poprawka równonocy w żadnym wypadku nie degraduje katalogowego układu odniesienia, poprawka zmieniająca się, świadczy natomiast o pewnych efektach dynamicznych potraktowanych nieprecyzyjnie.

Układ odniesienia nieruchomy, definiowany za pomocą katalogów fundamentalnych nazywać będziemy układem odniesienia gwiazdowym.

Pomijając niedokładności o charakterze residualnym, układ gwiazdowy, definiowany jest w sposób całkowicie zgodny wewnętrznie. W idealnym przypadku, układ odniesienia gwiazdowy powinien być inercjalny, ale zakres w jakim ten ideał jest osiągany należy wyznaczyć drogą porównań z układami odniesienia zdefiniowanymi w inny sposób, np. wykorzystujących obiekty pozagalaktyczne.

Katalogi FK4, FK5

Zgodnie z dyrektywą MUA, od roku 1963 układem fundamentalnym był Fourth Fundamental Catalogue (FK4) opracowany przez Fricke'ego i Kopff'a, z Astronomisches Rechen Institut z Heidelbergu. Zawiera dane 1535 gwiazd. Do utworzenia katalogu FK4 wykorzystano obserwacje z lat 1950-tych, standardową epoką jest B1950.0.

Obserwacje późniejsze wykorzystano do opracowania katalogu FK5. Epoką stanardową jest data J2000.0. Rewizja katalogu FK4 trwała do 1983 roku.

Stwierdzono, że punkty równonocy obydwóch katalogów nieco się różnią. W efekcie rektascensje otrzymane za pomocą tych systemów wykazują różnice systematyczne:

$$\alpha_{FK5} = \alpha_{FK4} + 0^{s}.0775 + 0^{s}.085T \qquad (44)$$

gdzie T jest interwałem w stuleciach juliańskich od J2000.0.

Oznacza to, że ruchy własne gwiazd w obydwu systemach równań również się różnią

$$(\mu_\alpha)_{FK5} = (\mu_\alpha)_{FK4} + 0^{s}.00085 \qquad (45)$$

co oznacza różnicę $1''.275$ na stulecie.

Katalogi FK5, FK6

Od 1984 roku system FK5 stał się dostępny poprzez roczniki astronomiczne.

Gwiazdy w katalogach fundamentalnych wykorzystywane są jako podstawowe (oporowe) w astrometrii względnej. O wiele prościej jest mierzyć rektascensję i deklinację gwiazdy względem systemu fundamentalnego aniżeli np. względem południka miejscowego.

W roku 1999 w Heildelbergu opublikowano kolejną wersję katalogu fundamentalnego *FK*6. Składa się z czterech części:

- I zawiera 879 gwiazd fundamentalnych,
- II obejmuje około 500 gwiazd fundamentalnych,
- III liczy 3272 gwwiazdy,
- IV zawiera około 1000 gwiazd.

Katalog FK6 powstał w rezultacie połączenia rezultatów astrommetrycznnego satelity Hipparcos z obserwacjami uzyskanymi na powierzchni Ziemi. Więcej informacji na ten temat można odnaleźć na stronie internetowej pod adresem: `http://www.zah.uni-heidelberg.de/ari/databases/`

Katalogi względne, niefundamentalne

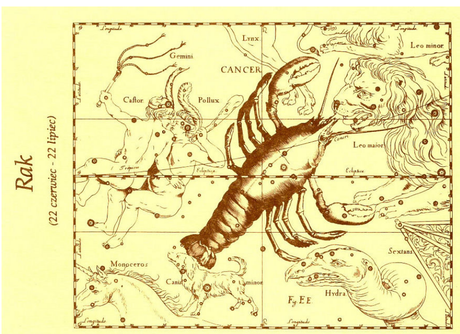
Katalogi ogólne o niefundamentalnej naturze podają położenia i ruchy własne olbrzymiej liczby gwiazd (10^6...). Stanowią one układy odniesienia drugiej rangi.

Gwiazdy w tych katalogach rozrzucone są po całej sferze niebieskiej z taką gęstością by pewna liczba skatalogowanych gwiazd znalazła się na ramce CCD podczas fotografowania danego obszaru nieba.

Współrzędne tych gwiazd wykorzystuje się do wyznaczania położeń innych obiektów metodami względnymi.

Przykładami katalogów niefundametalnych są katalogi Tycho-1, Tycho-2 powstałe również w wyniku misji Hipparcos.

Po więcej informacji proszę zerknąc pod `http://tdc-www.harvard.edu/catalogs/tycho2.html`



Rysunek: Fragment “ Catalogus stellarum fixarum “ Jana Heweliusza.

Początek wykładu