Astronomia sferyczna
Wykład 11: RUCH WŁASNY GWIAZD

Tadeusz Jan Jopek

Obserwatorium Astronomiczne, UAM

Semestr II
(Uaktualniono 2015.05.26)

Część I

RUCH WŁASNY GWIAZD

Historia

Wg pracy (Podobed 1975), astronom chiński I. Sin żyjący w latach AD 683–727, porównując swoje obserwacje względnych położeń gwiazd z gwiazdozbioru Strzelca z obserwacjami swych poprzedników, sformułował hipotezę o zmianie z czasem kątowych odległości pomiędzy gwiazdami.

W Europie ruchy własne gwiazd po raz pierwszy zauważył E. Halley, który w roku 1718 porównał współczesne mu położenia Syriusza, Procjona i Arktura z ich położeniami podanymi w *Almageście* Ptolemeusza.

W roku 1742 Bradley sformułował przypuszczenie, że ruchy gwiazd odzwierciedlają ruch Słońca w przestrzeni.

Trzydzieści trzy lata później Mayer opublikował pierwszy katalog zawierający ruchy własne ponad stu gwiazd.

Następne katalogi opracowane przez Argelandera, Bessel'a pozwoliły na wyciągnięcie wniosku, że istnieją składowe ruchu własnego gwiazd wynikające wyłącznie z ich ruchów w przestrzeni.

Gwiazdy o dużym ruchu własnym, przykłady

Ze wzrostem dokładności pomiarów astrometrycznych okazało się, że ruchy własne gwiazd są bardzo małe, ich wielkość rzadko przekracza $0.''1$/rok.

Bliska Słońca gwiazda α Centaura ma ruch własny $3.''682$/rok.

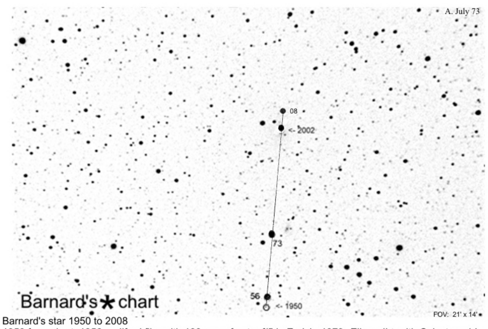
α Małej Niedźwiedzicy ma ruch własny $1.''242$/rok

Ruch ruczny gwiazdy 61 Łabędzia wynosi $5.''234$/rok.

Gwiazda α Liry przemieszcza się $0.''343$/rok.

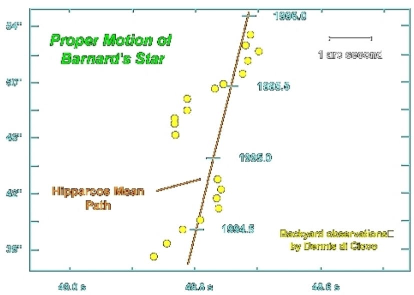
Największy ruch własny wykazuje gwiazda Barnarda, wynosi on $10.''27$rok. Jest to słaba gwiazda o jasności 9.7^m.

Gwiazda Barnarda w latach 1950-2008



Barnard's star 1950 to 2008
1950 from chart; 1956 on Ilford film with 100mm refractor f/5 in Zurich; 1973 Elburn,IL, with Celestron-14 on Kodak film; 2002 , with same Celestron-14 on CCD; 2008 Wyalusing with Huser Scope 09/01/08 GWTB

Zmiany położenia gwiazdy Barnarda



[http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/motion/proper.html]

Położenia gwiazdy Barnarda uzyskane teleskopem amatorskim z powierzchni Ziemi. Falista trajektoria to efekt rocznej paralaksy, ma roczną okresowość. Linia prosta jest uśrednionym torem w przestrzeni, uzyskanym przez satelitę Hipparcos.

Zastosowania ruchów własnych gwiazd

W czasach współczesnych znane są ruchy własne ponad 2.5 miliona gwiazd. Taką liczbę gwiazd zawiera katalog gwiazd *Tycho 2.*

Ruchy własne gwiazd mają duże znaczenie:

- do niedawna astronomiczne układy odniesienia konstruowano w opiarciu o obserwacje gwiazd, zatem znajomość kątowych przesunięć w czasie tych reperów jest konieczna,
- służą do określenia przestrzennych prędkości gwiazd; do badania kinematyki gwiazd; oceny zbliżeń gwiazd do Układu Słonecznego,
- wykorzystywane są oszacowania masy i odległości gromad kulistych,
- ich analiza potwierdza hipotezę o obecności supermasywnych czarnych dziur w centrum Galaktyki.

Ruchy własne, definicja.

Ruchami własnymi gwiazd nazywamy ich widome przemieszczenia na sferze niebieskiej, które zaszły w trakcie roku.

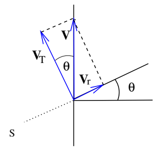
Wielkość tych zmian wyznacza się porównanując położenia gwiazd z różnych epok, oczywiście po uwzględnieniu wpływu powodu precesji, aberracji, ...

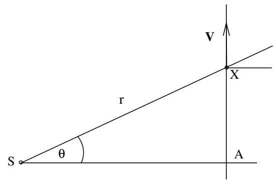
Wyznaczając ruchy własne niemal zawsze zakłada się, że gwiazdy w przestrzeni poruszają się prostoliniowo. Oznacza to, że rzuty trajektorii gwiazd na sferze niebieskiej są kołami wielkimi.

Odstępstwa od tego założenia są rzadkim zjawiskiem. Powodem są ogromne odległości gwiazd od Układu Słonecznego. Dokładność pomiarów ruchów własnych jest na tyle niska, że najczęściej uniemożliwia wykrycie odstępstwa od prostoliniowości trajektorii ruchu.

Ruch własny nie jest rezultatem przemieszczania się samej gwiazdy w przestrzeni. Odzwierciedla on również ruch Układu Słonecznego objawiający się rozbieganiem i skupianiem się gwiazd w kierunku apeksu i antyapeksu ruchu Słońca. Zmiany położeń gwiazdy okresowej natury, będące efektem np. paralaksy rocznej nie są włączane do ruchu własnego.

Ruch własne, definicja cd1





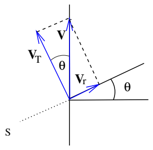
Ruch własny opisujemy względem układu o początku w centrum Słońca. Niech gwiazda X ma prędkość $\mathbf{V}$ a jej położenie określa wersor $\mathbf{s}$ (kierunek SX na rysunku). Prędkość $\mathbf{V}$ możemy rozłożyć na składową radialną V_r i transwersalną $\mathbf{V}_T$

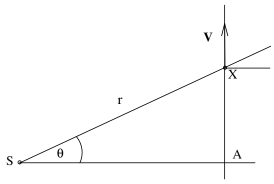
$$\mathbf{V} = V_r\mathbf{s} + \mathbf{V}_T \tag{1}$$

Ze znanych zależności wektorowych mamy (patrz Karaśkiewicz 1971)

$$\begin{aligned} V_r &= \mathbf{V} \cdot s \\ \mathbf{V}_T &= \mathbf{s} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{s}) \end{aligned} \tag{2}$$

Ruch własne, definicja cd2



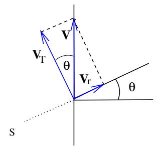


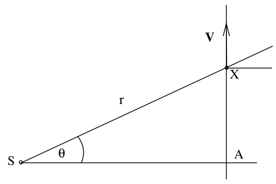
Wartość składowej radialnej $\mathbf{V}_r$ wyznaczana jest za pośrednictwem zjawiska Dopplera, przesunięcia linii widmowych gwiazdy.

Składową transwersalną $\mathbf{V}_T$ nie zawsze daje się w pełi wyznaczyć.
Jej kierunek jest ustalony w oparciu o pomiary przesunięcia gwiazdy, czyli z obserwacji jej ruchu własnego.

Jednak długość wektora $\mathbf{V}_T$ można wyznaczyć tylko wówczas gdy znana jest odległość gwiazdy od Słońca.

Ruch własne, definicja cd3





Na rysunku, X oznacza położenie gwiazdy, które z upływem czasu powoli ulega zmianie. Skala czasowa tych zmian jest rzędu okresu rotacji Galaktyki ($\sim 2 \cdot 10^8$ lat). Dlatego w interwałach czasu wyraźnie krótszych, zupełnie uzasadnionym jest założenie o stałości wektora prędkości $\mathbf{V}$ gwiazdy względem Słońca.

Przy takim założeniu trajektoria gwiazdy jest linią prostą AX, a para θ, r pełni rolę współrzędnych biegunowych gwiazdy względem bieguna (Słońca) i linii początkowej SA.

Ruch własne, definicja cd4

Przyjmijmy, że odległość r mierzona jest w kilometrach, kąt θ w radianach natomiast czas t w latach zwrotnikowych. Prędkość tradycyjnie określana jest w km/s. W takich jednostkach składowe prędkości mają postać:

$$V_r = V\sin\theta = \frac{1}{n}\frac{dr}{dt} \tag{3}$$

$$V_T = V\cos\theta = \frac{1}{n}r\frac{d\theta}{dt} \tag{4}$$

Skoro t ma być latach zwrotnikowych a prędkość w km/s, stąd stała $n = 24 * 3600 * 365.2224$ jest liczbą sekund w roku zwrotnikowym.

Roczny ruch własny μ jest to wartość kątowego przemieszczenia gwiazdy na sferze względem nieruchomego równika i równonocy, które miało miejsce w interwale jednego roku.

Tradycyjnie μ mierzone jest w sekundach łuku na rok zwrotnikowy i dlatego w tych jednostkach ruch własny określony jest formułą

$$\mu = \frac{d\theta}{dt}\csc 1'' \tag{5}$$

Ruch własne, definicja cd5

Podając odległość r do gwiazdy za pomocą paralaksy π (wartość w $''$):

$$r = \frac{1}{\pi}\ [pc],$$

przechodząc do jednostek astronomicznych, a następnie do kilometrów:

$$r = \frac{1}{\pi} \cdot 206265\ [AU] = \frac{1}{\pi \sin 1''} \cdot 1.496108 \cdot 10^8\ [km]$$

$$r = a\pi^{-1}\csc 1'' \tag{6}$$

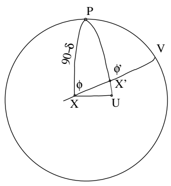
gdzie a jest jednostką astronomiczną w km ($a = 1.496108 \cdot 10^8$ km).
Mamy więc nową postać równania (4):

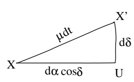
$$V_T = \frac{a}{n}\frac{\mu}{\pi} \tag{7}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych:

$$V_T = 4.74\frac{\mu}{\pi} \quad [km/sek] \tag{8}$$

Ruch własny w rektascensji i deklinacji

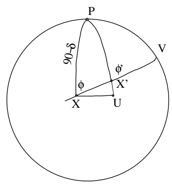


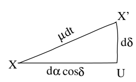


Roczny ruch własny μ rozkładany jest na składowe μ_α oraz μ_δ w rektascensji i deklinacji, odpowiednio. Składowe reprezentują roczne tempo zmiany rektascensji i deklinacji.

Na rysunku mamy dwa położenia X i X' gwiazdy odpowiadające momentom czasu różniącym się o dt. Czyli $XX' = \mu dt$. Ponieważ P oznacza północny biegun świata, stąd kąt $PXX' = \phi$ jest kątem pozycyjnym ruchu własnego. Jego dziedziną jest przedział $[0, 360°]$, kąt narasta w kierunku zegarowym.

Ruch własny w rektascensji i deklinacji cd1





Małe koło o biegunie w P, przechodzące przez X przecina koło wielkie PX' w punkcie U. (α, δ) są równikowymi współrzędnymi gwiazdy X, natomiast $(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$ są współrzędnymi gwiazdy X'. Łatwo przekonać się, że

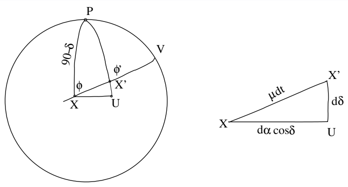
$$UX = d\alpha\cos\delta \quad UX' = d\delta$$

Traktując mały trójkąt UXX' jako płaski, w pierwszym przybliżeniu będzie

$$d\alpha\cos\delta = \mu dt\sin\phi \quad d\delta = \mu dt\cos\phi \tag{9}$$

Składowe ruchu własnego μ są pochodnymi $d\alpha/dt$ oraz $d\delta/dt$ a zatem możemy je otrzymać dzieląc obie strony równania (9) przez dt.

Ruch własny w rektascensji i deklinacji cd2

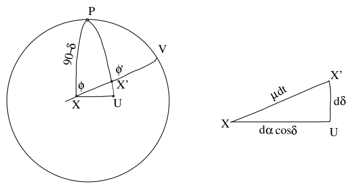


W praktyce składową μ_α podajemy w sekundach czasu na rok, składową μ_δ w sekundach łuku na rok

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \tfrac{1}{15}\mu \sin\phi \sec\delta \\ \mu_\delta &= \mu\cos\phi \end{aligned} \tag{10}$$

Na razie założenie o stałości wektora **V** nie było nam potrzebne. Jedną z konsekwencji prostoliniowego ruchu gwiazdy jest to, że projekcja centralna trajektorii gwiazdy na sferę jest fragmentem koła wielkiego.
Warto też zapamiętać, że stałość w czasie wektora prędkości **V** gwiazdy nie pociąga stałości składowych μ_α, μ_δ.

Ruch własny w rektascensji i deklinacji cd3



Niech punkt V z rysunku będzie punktem na sferze wyznaczonym przez kierunek wektora prędkości gwiazdy. Punkt ten leży oczywiście na kole wielkim XX'.

Oznaczmy kąt $PX'V$ przez ϕ', jest to kąt pozycyjny ruchu własnego gwiazdy w momencie $t + dt$, mamy oczywisty związek

$$\phi' = PX'V = \phi + d\phi \tag{11}$$

Kąt ten zmiania się w czasie.

Część II

ZMIANY SKŁADOWYCH RUCHU WŁASNEGO

Wewnętrzne zmiany składowych μ_α, μ_δ

Zmiany współrzędnych położenia gwiazdy w interwale t określone jedynie jako $(\mu_\alpha t, \mu_\delta t)$ jest równoważne rozwinięciu wyrażeń $(\alpha(t), \delta(t))$ w szeregi Taylora i obcięciu szeregów na wyrazach pierwszego rzędu.

Dla gwiazd o dużym ruchu własnym należy dołączyć przynajmniej wyrazy rzędu drugiego. Te zaś określone są poprzez pochodne z μ_α i μ_δ.

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \left[\mu_\alpha + \tfrac{1}{2} t \tfrac{d\mu_\alpha}{dt}\right] \cdot t \\ \delta' &= \delta + \left[\mu_\delta + \tfrac{1}{2} t \tfrac{d\mu_\delta}{dt}\right] \cdot t \end{aligned} \tag{12}$$

Wyprowadzimy wyrażenia na te pochodne przyjmując, że równik i punkt równonocy są nieruchome (co oznacza, że chwilwo wyłączamy z rozważań zmiany precesyjne), czyli rozpatrujemy zmiany w μ_α i μ_δ, które są wyłącznie efektem ruchu gwiazdy na sferze niebieskiej.

O takich zmianach mówimy, że są to wewnętrzne zmiany składowych $(\mu_\alpha t, \mu_\delta t)$ ruchu własnego.

Pochodne składowych μ_α, μ_δ

Obliczając pochodne równań (10) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\mu_\alpha}{dt} &= \tfrac{1}{15}\tfrac{d\mu}{dt}\sin\phi\sec\delta + \tfrac{1}{15}\mu\cos\phi\sec\delta\tfrac{d\phi}{dt} + \tfrac{1}{15}\mu\sin\phi\sec\delta\tan\delta\tfrac{d\delta}{dt} \\ \tfrac{d\mu_\delta}{dt} &= \tfrac{d\mu}{dt}\cos\phi - \mu\sin\phi\tfrac{d\phi}{dt} \end{aligned} \tag{13}$$

Pochodne z ϕ i δ są wyrażone w mierze *kołowej*, o pozostałych wielkościach zakłada się, że są w jednostkach praktycznych. Pamiętając o definicji

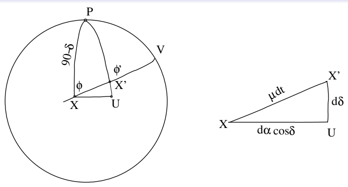
$$\frac{d\delta}{dt} = \mu_\delta \sin 1'' \tag{14}$$

a także dokonując w równaniu (13) stosownych podstawień lewych stron równań (10) dostaniemy:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\mu_\alpha}{dt} &= \tfrac{1}{15}\tfrac{d\mu}{dt}\sin\phi\sec\delta + \tfrac{1}{15}\mu_\delta\sec\delta\tfrac{d\phi}{dt} + \mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin 1'' \\ \tfrac{d\mu_\delta}{dt} &= \tfrac{d\mu}{dt}\cos\phi - 15\mu_\alpha\cos\delta\tfrac{d\phi}{dt} \end{aligned} \tag{15}$$

By wykorzystać te wzory trzeba dysponować pochodną kąta pozycyjnego ϕ oraz pochodną kątowego ruchu własnego μ.

Pochodna kąta pozycyjnego ϕ



Jeśli (α', δ') są współrzędnymi punktu X', to w trójkącie PXX' mamy:

$$PX = 90^o - \delta, \quad PX' = 90^o - \delta', \quad PXX' = \phi, \quad PX'X = 180^o - \phi'$$

A wówczas z twierdzenia sinusów:

$$\cos\delta\sin\phi = \cos\delta'\sin\phi'$$

co oznacza, że podczas przemieszczania się gwiazdy po kole wielkim $XX'V$, wielkość $\cos\delta\sin\phi$ jest zachowana, a więc:

$$\frac{d}{dt}(\cos\delta\sin\phi) = 0 \tag{16}$$

Pochodna kąta pozycyjnego ϕ

Obliczając pochodną (16) dostaniemy

$$\frac{d\phi}{dt} = \tan\phi\tan\delta\frac{d\delta}{dt}.$$

A za pomocą równań (10)

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{15\mu_\alpha\sin\delta}{\mu\cos\phi}\frac{d\delta}{dt}.$$

Ponownie wykorzystując (10), biorąc jeszcze (14), ostatecznie mamy

$$\frac{d\phi}{dt} = 15\mu_\alpha\sin\delta\sin 1'' \tag{17}$$

Pochodna ruchu własnego μ

Tempo zmian μ nazywane jest przyspieszeniem perspektywicznym. Otrzymamy je różniczkując obie strony równania (4)

$$-V\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{n}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{r}{n}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Pochodne kąta θ można wyeliminować za pomocą równania (5) i jego pierwszej pochodnej, w rezultacie otrzymamy

$$-V\sin\theta\mu\sin 1'' = \frac{1}{n}\frac{dr}{dt}\mu\sin 1'' + \frac{r}{n}\frac{d\mu}{dt}\sin 1''$$

Za pomocą równania (3), po uproszczeniach, będzie w efekcie otrzymamy

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2n\mu V_r}{r}$$

Podstawiając r prawą stronę równania $r = a\pi^{-1}\csc 1''$ (równanie (6)) mamy, że przyspieszenie perspektywiczne

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2n}{a}V_r\mu\pi\sin 1'' \tag{18}$$

Pochodne składowych ruchu własnego μ

Po podstawieniu stałych liczbowych ostatecznie będzie:

$$\frac{d\mu}{dt} = -0.422V_r\mu\pi\sin 1''. \tag{19}$$

Z pochodnymi kąta pozycyjnego i ruchu własnego wracamy do równań (15)

$$\begin{aligned} \tfrac{d\mu_\alpha}{dt} &= \tfrac{-0.422}{15}V_r\mu\pi\sin 1''\sin\phi\sec\delta + \tfrac{1}{15}\mu_\delta\sec\delta\cdot 15\mu_\alpha\sin\delta\sin 1'' + \\ &\quad +\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin 1'' \\ \tfrac{d\mu_\delta}{dt} &= -0.422V_r\mu\pi\sin 1''\cos\phi - 15\mu_\alpha\cos\delta\cdot 15\mu_\alpha\sin\delta\sin 1''. \end{aligned}$$

Robiąc użytek z (10), wewnętrzne zmiany ruchu własnego otrzymają postać

$$\begin{aligned} \tfrac{d\mu_\alpha}{dt} &= -0.422V_r\mu_\alpha\pi\sin 1'' + 2\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin 1'' \\ \tfrac{d\mu_\delta}{dt} &= -0.422V_r\mu_\delta\pi\sin 1'' - 225\mu^2{}_\alpha\sin\delta\cos\delta\sin 1'', \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie: składowa μ_α wyrażona jest w $[sek/rok]$, składowa μ_δ w $[''/rok]$, paralaksa π w $['']$, a prędkość radialna V_r w $[km/s]$.

Zmiany położenia gwiazdy z powodu ruchu własnego

Pochodne (20) są konieczne jedynie w przypadkach szczególnie dużego ruchu własnego. Sytuacje takie mają miejsce dla gwiazd bliskich i szybkich. W takich wypadkach wyrażenia (20) umożliwiają obliczenie przemieszczenia gwiazdy z dużą precyzją.

Niech gwiazda ma współrzędne (α, δ) a składowe jej ruchu własnego (μ_α, μ_δ) znane są w pewnej epoce początkowej. Po upływie t współrzędne gwiazdy wynoszą (α', δ') i zgodnie z naszymi wywodami obliczymy je za pomocą formuł:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \left[\mu_\alpha + \tfrac{1}{2}t\tfrac{d\mu_\alpha}{dt}\right]\cdot t \\ \delta' &= \delta + \left[\mu_\delta + \tfrac{1}{2}t\tfrac{d\mu_\delta}{dt}\right]\cdot t. \end{aligned} \tag{21}$$

Równanie (21) jest wystarczająco dokładne dla niemal wszystkich gwiazd w interwale czasu rzędu 100 lat lub mniej. Drugie pochodne ruchu własnego potrzebne są jedynie w przypadkach "patologicznych".

Ruch własny, notacja wektorowa

Przedstawiona analiza wymagała założenia stałości prędkości gwiazdy względem Słońca. Założenie to jeśli jest adekwatne do rzeczywistości pozwala na dokładne rozwiązanie problemu ruchu własnego gwiazdy.

Wykorzystamy je jeszcze raz poszukując rozwiązania w formaliźmie wektorowym. Przypuśćmy, że $\mathbf{s} = (x, y, z)$ jest wektorem jednostkowym kierunku gwiazdy, wówczas ruch własny czyli zmianę tego kierunku, możemy określić za pomocą wektora:

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta)\,. \tag{22}$$

Trzy składowe wektora $\boldsymbol{\mu}$ dają się łatwo wyrazić za pomocą μ_α i μ_δ, w sekundach łuku wynoszą one:

$$\begin{aligned} \mu_x &= -15\sin\alpha\cos\delta\mu_\alpha - \cos\alpha\sin\delta\mu_\delta \\ \mu_y &= 15\cos\alpha\cos\delta\mu_\alpha - \sin\alpha\sin\delta\mu_\delta \\ \mu_z &= \cos\delta\mu_\delta \end{aligned} \tag{23}$$

Ruch własny, notacja wektorowa

Wektor $\mathbf{V}_T$ wiąże się z wektorem $\boldsymbol{\mu}$ wektorowym odpowiednikiem rów. (7)

$$\mathbf{V}_T = \frac{a}{n\pi}\boldsymbol{\mu} \tag{24}$$

Stąd pełny wektor prędkości przestrzennej gwiazdy ma postać

$$\mathbf{V} = V_r\mathbf{s} + \frac{a}{n\pi}\boldsymbol{\mu} \tag{25}$$

(25) wykorzystamy do obliczenia bieżącego położenia gwiazdy. Jeśli $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$ będzie początkowym wektorem położenia gwiazdy, natomiast $\mathbf{r}'$ określa położenie po upływie t lat, to ponieważ $\mathbf{V}$ jest wektorem stałym mamy, że:

$$\mathbf{r}' = r\mathbf{s} + \mathbf{V}nt,$$

n — współczynnik zamiany jednostek czasu. Korzystając z(6), (25):

$$\mathbf{r}' = a\pi^{-1}\csc 1''\mathbf{s} + V_r\mathbf{s}nt + n\frac{a}{n\pi}\boldsymbol{\mu}t$$

$$\mathbf{r}' = a\pi^{-1}\csc 1''\left(\mathbf{s} + \frac{V_r\pi nt}{a\csc 1''}\mathbf{s} + \frac{1}{\csc 1''}\boldsymbol{\mu}t\right). \tag{26}$$

Ruch własny, notacja wektorowa cdn1

Po podstawieniu:

$$k = \frac{a}{\pi}\csc 1''$$

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s}\left[1 + \mathbf{V}_r\frac{\pi nt}{a\csc 1''}\right] + \boldsymbol{\mu}t\,\sin 1''.$$

i po wprowadzeniu wartości liczbowych za a i n:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s}\left[1 + \mathbf{V}_r\frac{\pi t}{4.74}\sin 1''\right] + \boldsymbol{\mu}t\,\sin 1''. \tag{27}$$

Ostatecznie równanie (26) w postaci skompresowanej:

$$\mathbf{r}' = k\,\mathbf{s}^* \tag{28}$$

$\mathbf{s}^*$ jest wektorem bliskim jednostkowemu, po jego normalizacji do jedności, będziemy dysponowali jednostkowym wektorem kierunku gwiazdy na nową epokę.

Ruch własny i precesja

Jak dotąd w trakcie wędrówki gwiazdy po sferze układ odniesienia był traktowany jako nieruchomy. Czyli $\alpha, \delta, \mu_\alpha, \mu_\delta$ były określone względem tego samego nieruchomego równika i równonocy. Nie brano w rachubę żadnych wpływów precesyjnych.

Wpływ precesji na składowe μ_α, μ_δ jest analogiczny do wpływu precesji na współrzędne gwiazd α, δ. Pytamy o to w jaki sposób transformować składowe ruchu własnego z jednej epoki do drugiej?

Niech $\boldsymbol{\mu_0}$ będzie wektorem ruchu własnego wyznaczonym względem równika i równonocy z epoki t_0. Wektor $\boldsymbol{\mu}$ będzie tym samym wektorem względem równika i równonocy z epoki t. W celu przejścia od epoki t_0 do epoki t, analogicznie jak to było dla wersora położenia gwiazd, możemy stosować znaną wektorową transformację obrotu

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\mu_0} \tag{29}$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest precesyjną macierzą obrotu wiążącą obie epoki.

Ruch własny i precesja cd1

Wektory $\boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\mu}$ mają składowe określone za pomocą równań (23), natomiast nowe wartości składowych μ_α, μ_δ otrzymamy z równań odwrotnych do (23)

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \tfrac{1}{15}(1 - z^2)^{-1}(x\mu_y - y\mu_x) \\ \mu_\delta &= (1 - z^2)^{-1/2}\mu_z) \end{aligned} \tag{30}$$

gdzie x, y, z są składowymi wersora położenia gwiazdy w epoce t.

Powyższe podejście rozwiązuje postawiony problem w pełni.

Ale gdybyśmy skusili się na rachunki ręczne warto mieć na podorędziu formuły nie wymagające aż tylu obliczeń.

Ruch własny i precesja cd2

Dlatego rzućmy okiem na równania (13) podane tu poniżej:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt} &= \frac{1}{15}\frac{d\mu}{dt}\sin\phi\sec\delta + \frac{1}{15}\mu\cos\phi\sec\delta\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{15}\mu\sin\phi\sec\delta\tan\delta\frac{d\delta}{dt} \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= \frac{d\mu}{dt}\cos\phi - \mu\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\end{aligned} \quad (31)$$

Są to pochodne z równań definiujących składowe ruchu własnego.

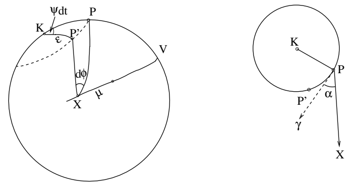
Pochodne te nic nie "wiedzą" o przyczynie zmian składowych μ_α, μ_δ i można je wykorzystać również wtedy gdy zmiany spowodowała precesja.

Musimy jedynie podstawić właściwe wyrażenia na pochodne w prawych stronach równań (31). Np. gdy interesuje nas precesja to pochodna

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (32)$$

gdyż precesja nie może wpłynąć na długość łuku ruchu własnego μ a jedynie na jego składowe.

Zmiany precesyjne składowych μ_α, μ_δ

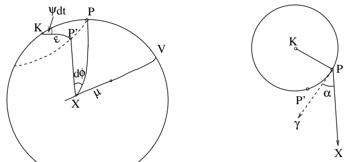


Deklinacja gwiazdy zmienia się wskutek precesji, dlatego jej pochodna po czasie nie będzie równa zeru. I tu, szczęśliwie, możemy sięgnąć do wykładu, w którym była mowa o precesji L-S i odszukać w nim tej oto przybliżonej formuły

$$\frac{d\delta}{dt} = n\cos\alpha\sin 1'' \quad (33)$$

gdzie precesyjna stała $n = \psi\sin\varepsilon$, natomiast ψ jest stałą precesji rocznej w długości ekliptycznej, obie stałe wyrażone są w sekundach łuku.

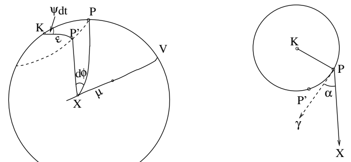
Zmiany precesyjne składowych μ_α, μ_δ cd1



Pozostaje do oszacowania wpływ zmian precesyjnych na kąt pozycyjny ϕ. Punkty P i P' oznaczają dwa położenia bieguna świata w epokach odległych o dt. W momencie wyjściowym gwiazda znajdowała się w miejscu X a jej ruch własny przebiegał wzdłuż koła wielkiego XV.

Widzimy, że przyrost kąta pozycyjnego, spowodowany precesją za okres dt wynosi $d\phi = P'XP$.

Zmiany precesyjne składowych μ_α, μ_δ cd2



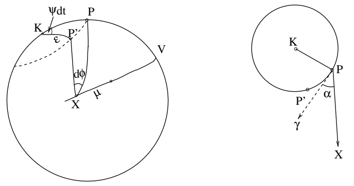
Niech α, δ i α', δ' będą współrzędnymi gwiazdy X określonymi względem biegunów P i P' i odpowiadających im punktów równonocy.

Kąt $P'X = 90^o - \delta'$, natomiast długość łuku PP' wynosi

$$PP' = \psi dt\sin\varepsilon = ndt$$

Jest to łuk koła małego, po którym z powodu prececji przemieszcza się średni biegun świata P wokół bieguna ekliptyki K.

Zmiany precesyjne składowych μ_α, μ_δ cd3



W trójkącie KPP' mamy, że kąt $KPP' = 90^o$, kąt $P'PX = \alpha$ bowiem jest to kąt równy rektascensji gwiazdy w momencie epoki początkowej.

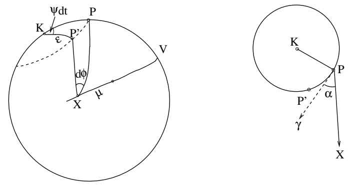
Ignorując niewielką różnicę pomiędzy łukiem koła wielkiego i koła małego łączącego P i P', ze wzoru sinusów dostaniemy:

$$\sin d\phi\cos\delta' = \sin(ndt)\sin\alpha$$

Gdy dt jest małe (dąży do zera), możemy napisać:

$$\frac{d\phi}{dt} = n\sin\alpha\sec\delta\sin 1'' \quad (34)$$

Zmiany precesyjne składowych μ_α, μ_δ cd4



Podstawiając prawe strony w (32), (33) i (34) za pochodne w (13), szybkości precesyjnych zmian składowych μ_α, u_δ określone będą formułami

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt} &= n\left[\mu_\alpha\cos\alpha\tan\delta + \frac{\mu_\delta}{15}\sin\alpha\sec^2\delta\right]\sin 1'' \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= -15n\mu_\alpha\sin\alpha\sin 1'',\end{aligned} \quad (35)$$

gdzie μ_α w sekundach czasowych, μ_δ oraz n w sekundach kątowych.

Omówione wpływy dotyczyły jedynie precesji L-S. Precesja planetarna nie wpływa na deklinacja gwiazdy i kąt pozycyjny kierunku ruchu własnego.

Zmiany łączne w μ_α i μ_δ: wewnętrzne i precesyjne

Gdy wymagana jest znajomość składowych ruchu własnego gwiazdy na pewną epokę t koniecznym jest uwzględnienie obu zmian: wewnętrznych i precesyjnych. Całkowite zmiany możemy zatem policzyć sumując prawe strony równań (20) i (35).

Zauważmy jeszcze, że stała precesyjna n występująca w równaniach (35) wynosi około $20''$, jest więc znacznie większa od typowego ruchu własnego gwiazd.

Oznacza to, że jeśli zachodzi konieczność uwzględnienia obu wpływów, wpływ precesji będzie bardziej znaczący. Dlatego w przypadku długich interwałów czasu pożądanym jest ulepszenie dokładności formuł (35), co można uzyskać podstawiając w nich wartość stałej n na środkowy moment wchodzącego w grę interwału czasu.

Jednak w takich przypadkach właściwszym jest zastosowanie podejścia wektorowego.

Część III

WYZNACZANIE RUCHÓW WŁASNYCH

Zasada wyznaczenia μ_α i μ_δ

Historycznie ruchy własne wyznaczano najpierw przez porównanie wizualnych położeń gwiazdy z dwóch różnych epok t_1, t_2.

Epoki te powinny być możliwie od siebie odległe, a to oznacza, że najczęściej ruch własny wyprowadzany był z obserwacji wykonanych na różnych instrumentach, porównywano współrzędne gwiazd wzięte z różnych katalogów zestawionych w różnych obserwatoriach.

Przed porównaniem, poprzez uwzględnienie precesji współrzędne gwiazd sprowadzono do identycznego układu odniesienia. Jeśli było to możliwe uwzględniano też systematyczne różnice między katalogami.

Po czym, dla każdej gwiazdy składowe rocznego ruchu własnego obliczano za pomocą równań:

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} \qquad \mu_\delta = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1} \tag{36}$$

Otrzymane taką drogą ruchy własne miały charakter przybliżony i określone były w systemie katalogu, do którego sprowadzono obie obserwacje.

Dokładne wyznaczenie μ_α i μ_δ

W tzw. dokładnych sposobach wyznaczania ruchów własnych gwiazd, wyprowadza się je za pomocą wielu katalogów o epokach obserwacyjnych oddalonych o możliwie długi interwał czasu. Takie podejście zmniejsza wpływ na rezultaty zarówno niepewności przypadkowych jak i systematycznych.

Niech na epoki obserwacyjne $t_1, t_2, \cdots, t_n$ dane będą współrzędne gwiazd zawarte w n wejściowych katalogach $K_1, K_2, \cdots, K_n$ zestawionych na równonoce $T_1, T_2, \cdots, T_n$.

Przed przystąpieniem do właściwego zadania, poszczególne katalogi trzeba sprowadzić do wspólnej równonocy odpowiadającej momentowi T_0. Uwzględniamy precesję za interwał $T_i - T_0$.

T_0 może być epoką jednego z katalogów K_i, albo lepiej którąś z epok standardowych np. B1950.0

Ponadto ze względu na różnice w dokładności, wszystkim katalogom należy przypisać stosowne wagi. Jeśli tego nie uczynimi, narażamy się na degradację precyzji rezultatów powodowaną słabszą dokładnością części katalogów wejściowych.

Dokładne wyznaczenie μ_α i μ_δ cd1

Na epokęT_0 wyznaczymy warość współrzędnej α_0 gwiazdy i składowej μ_α.

Dla każdej gwiazdy do dyspozycji mamy n wartości rektascensji $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, odpowiadających epokom obserwacyjnym $t_1, \cdots, t_n$.

Wszystkie α_i są określone w tym samym układzie odniesienia z epoki T_0, bo uwzględniliśmy precesję.

Współrzędne $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ różnią się od siebie o niewielkie wartości, przyczyną różnic są ruch własny i niepewności pomiarowe.

Zatem dla każdej gwiazdy możemy napisać następujące równanie warunkowe, analogiczne do jednego z równań (36)

$$\alpha_i = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - t_0) + \frac{d\mu_\alpha}{dt}\frac{(t_i - t_0)^2}{2} \qquad i = 1, n.$$

Identyczne równania możemy zestawić ze względu na deklinację.

$$\delta_i = \delta_0 + \mu_\delta (t_i - t_0) + \frac{d\mu_\delta}{dt}\frac{(t_i - t_0)^2}{2} \qquad i = 1, n.$$

Dokładne wyznaczenie μ_α i μ_δ cd1

$$\alpha_i = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - t_0) + \frac{d\mu_\alpha}{dt}\frac{(t_i - t_0)^2}{2} \qquad i = 1, n.$$

$$\delta_i = \delta_0 + \mu_\delta (t_i - t_0) + \frac{d\mu_\delta}{dt}\frac{(t_i - t_0)^2}{2} \qquad i = 1, n.$$

Dla każdej gwiazdy osobno, rozwiązanie tych równań metodą najmniejszych kwadratów daje wszystkie poszukiwane niewiadome

$\alpha_0, \delta_0, \mu_\alpha, \mu_\delta, d\mu_\alpha/dt, d\mu_\delta/dt$

czyli — współrzędne gwiazdy, składowe ruchu własnego oraz wewnętrzne zmiany składowych ruchu własnego.

Przedstawiona metoda daje dobre rezultaty dla wszystkich gwiazd oprócz tych, które znajdują się w okolicach podbiegunowych. Dla takich gwiazd w równaniach obserwacyjnych musimy wprowadzić wyrazy wyższych rzędów.

Współczesne metody wyznaczenia μ_α i μ_δ

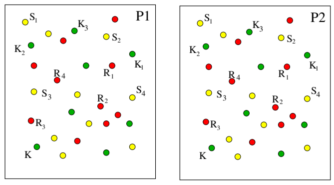
Obecnie ruchy własne niemal wyłącznie wyznacza się metodami astrometrii fotograficznej lub różnych wariantów astrometrii CDD i astrometrii satelitarnej (Hipparchos, Gaja).

Sposób fotograficzny z natury rzeczy pozwala na bezpośrednie wyznaczenie jedynie względnych ruchów gwiazd, tzn. badamy ruchy pewnej wybranej grupy gwiazd względem innej grupy gwiazd, również będących w ruchu, tyle że niewielkim, co pozwala na traktowanie ich jako nieruchomych. Obie grupy gwiazd powinny zajmować niewielki obszar sfery ograniczony do pola widzenia pojedynczej lub kilku częściowo pokrywających się klisz.

Przy takim podejściu naturalnym jest pytanie o standaryzację rezultatów tj. o sprowadzenie obliczonych względnych ruchów gwiazd do określonego układu odniesienia np. do systemu katalogu fundamentalnego.

Jest to zadanie trudniejsze od samego wyznaczania względnych ruchów własnych. Można je rozpatrywać za pomocą tzw. gwiazd kontrolnych, czyli takich, których ruchy własne są znane w dwóch systemach, obserwowanym i drugim przyjętym jako standardowy.

Opracowanie dwóch płyt z obrazami gwiazd

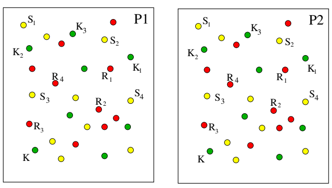


Na płytach P1 i P2 w epokach $t1$, $t2$ sfotografowano ten sam fragment sfery.

Na płytach identyfikujemy z katalogiem i mierzymy położenie wielu gwiazd.

Wśród nich ustalamy te, których ruchy własne chcemy wyznaczyć — żółte punkty S_s, $s = 1, 2, ...M$.

Gwiazdy oporowe i kontrolne

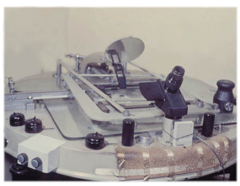


Dalej wbieramy N gwiazd odniesienia (oporowych), kolor czerwony, S_r, $r = 1, 2, ...N$ oraz K gwiazd kontrolnych, kolor zielony, S_k, $k = 1, 2, ...K$.

Badane gwiazdy typu S_s będą gwiazdami ruchomymi, natomiast gwiazdy odniesienia będziemy traktowali jako nieruchome.

Gwiazdy kontrolne S_k są to obiekty, o których ruchach własnych posiadamy pełną informację, ich ruchy znamy w jakimś systemie odniesienia.

Współrzędne prostokątne gwiazd



(x, y) oznaczają współrzędne mierzone gwiazd na kliszy P1,

(x', y') oznaczaja współrzędne mierzone gwiazd z kliszy P2.

Umówimy się jeszcze, że na obu płytach współrzędne zostały sprowadzone do centroidu systemu gwiazd oporowych, tzn., że wartości współrzędnych gwiazd podane są względem punktów o współrzędnych:

$$\begin{aligned} \overline{x}_r &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{r=1}^{N} x_r, & \overline{y}_r &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{r=1}^{N} y_r \\ \overline{x}'_r &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{r=1}^{N} x'_r, & \overline{y}'_r &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{r=1}^{N} y'_r \end{aligned} \tag{37}$$

Natomiast różnicę $(t2 - t1)$ wyrazimy w latach i oznaczymy przez τ.

Transformacja położeń gwiazd z płyty P2 do łyty P1

Naszym zadaniem jest wyznaczenie ruchów własnych gwiazd S_s przy danym wyborze gwiazd S_r.

Rozwiązanie problemu opiera się o ogólne zasady astrometrycznej redukcji fotografii pola gwiazdowego z tą różnicą, że zamiast współrzędnych tangencjalnych ξ, η, do których normalnie dopasowujemy współrzędne mierzone, tym razem bierzemy współrzędne mierzone np. z kliszy P1.

Model dopasowania dobierany jest w zależności od konkretnej sytuacji obserwacyjnej. Jeśli płyty P1 i P2 otrzymano na tym samym narzędziu, w tym samym miejscu, w podobnych warunkach, jeśli centra optyczne obu płyt są sobie bliskie, wówczas w pełni wystarczającym okazuje się być model liniowy.

W takim przypadku stałe kliszy wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów z równań obserwacyjnych postaci:

$$\begin{aligned} c_1 + a_1 x'_r + b_1 y'_r &= x_r \\ c_2 + a_2 x'_r + b_2 y'_r &= y_r \end{aligned} \tag{38}$$

Niewiadome współczynniki $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów.

Obliczenie przemieszczenia gwiazd na płycie

Za pomocą wyznaczonych współczynników $a_1, b_1, \cdots$ możemy obliczyć współrzędne gwiazd badanych S_s na epokę t_2, w systemie współrzędnych kliszy P1, mianowicie:

$$\begin{aligned} x_s^{(2)} &= c_1 + a_1 x'_s + b_1 y'_s \\ y_s^{(2)} &= c_2 + a_2 x'_s + b_2 y'_s \end{aligned} \tag{39}$$

Współrzędne zmierzone badanych gwiazd z epoki $t1$, w systemie kliszy $P1$, dla symetrii oznaczymy je jako $x_s^{(1)}, y_s^{(1)}$, porównujemy ze współrzędnymi obliczonymi z równania (39), czyli znajdujemy przemieszczenie obrazów gwiazd na kliszy P1 z powodu ruchu własnego w interwale τ.
Stąd, poszukiwany ruch własny gwiazd obliczymy jako:

$$\mu_{sx} = \frac{x_s^{(2)} - x_s^{(1)}}{\tau} M_x \qquad \mu_{sy} = \frac{y_s^{(2)} - y_s^{(1)}}{\tau} M_y \tag{40}$$

gdzie M_x, M_y są skalami odwzorowania na kliszy P1 w kierunkach osi X i Y. Obliczone z formuł (40) μ_{sx}, μ_{sy} powinny być wyrażone w sekundach na rok.

Wyznaczenie μ_α i μ_δ

Jeżeli osie układów współrzędnych mierzonych zorientowano w sposób standardowy, tzn. tak jak zorientowane są osie układu (ξ, η), [1] wówczas przejścia od pary μ_x, μ_y do pary μ_α, μ_δ możemy dokonać za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \frac{1}{15} \sec\delta \left[\mu_x + \frac{x - x_T}{f_0} \tan\delta\, \mu_y\right] \\ \mu_\delta &= \mu_y - \frac{x - x_T}{f_0} \tan\delta\, \mu_x \end{aligned} \tag{41}$$

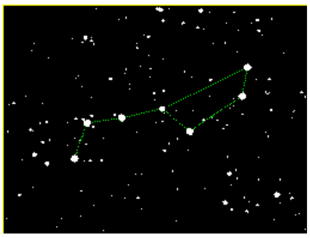
gdzie x_T jest współrzędną mierzoną centrum optycznego. Wyrażenie $(x - x_T)/f_0$ jest odległością badanej gwizady od centralnego południka płyty, wyrażoną w jednostkach ogniskowej f_0 teleskopu.

Przedstawiona metodyka wyznaczania ruchów własnych nie jest jedyną jaką mamy do dyspozycji. Np. zamiast równań obserwacyjnych postaci (38) można było wziąć równania:

$$c + ax + by = x^{(2)} - x^{(1)}. \tag{42}$$

Po prawej stronie mamy różnicę współrzędnych gwiazd z płyty P2 i P1, natomiast po lewej mamy współrzędne mierzone gwiazd z płyty P2 bądź P1.

[1] Oś ξ wzdłuż równoleżnika w kierunku narastania rektascensji, oś η wzdłuż koła deklinacyjnego ku biegunowi północnemu sfery.



Rysunek: Ruch własny gwiazd z konstelacji UMa w interwale 10^5 BC – 10^5 AD.

[http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Movies/proper.html]

Początek wykładu

Literatura

Karaśkiewicz, E. (1971). *Zarys teorii wektorów i tensorów*. Ed. by PWN. 2nd ed. PWN Warszawa.
Podobed V. V., Nesterov V.V. (1975). *Obschtschaja Astrometrija*. Ed. by Nauka. Nauka Moskva.