

# Astronomia sferyczna

## Wykład 9: PRECESJA i NUTACJA

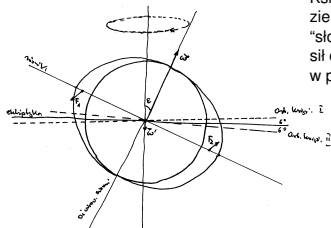
Tadeusz Jan Jopek

Obserwatorium Astronomiczne, UAM

Semestr II  
(Uaktualniono 2015.05.12)

- 1 Precesja L-S
  - Precesja Luni Solarna
- 2 Precesja planetarna
  - Precesja planetarna
- 3 Precesja ogólna
  - Precesja ogólna
- 4 Precesja – ściśle
  - Precesja ogólna, podejście ściśle

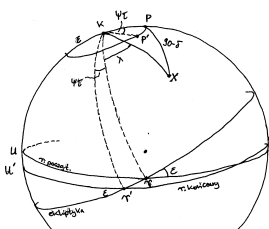
### Precesja L-S fizyczna strona zjawiska



Moment pary sił  $F_1, F_2$  to efekt grawitacyjnego oddziaływania Słońca i Księżyca na równikowe wybrzuszenia ziemskiej bryły. Wypadkowy średni "słoneczny" moment składowych tych sił dąży do ustawienia równika Ziemi w płaszczyźnie ekliptyki.

Moment "księżycowy" dąży do ustawienia równika w płaszczyźnie orbity Księżyca. Ale orbita Księżyca zmienia swoje położenie względem ekliptyki, stąd w usrednieniu, moment "księżycowy" również ustawia równik w płaszczyźnie ekliptyki.

### Precesja L-S (1)



Precesja luni-solarna (L-S) to regularny ruch bieguna świata.

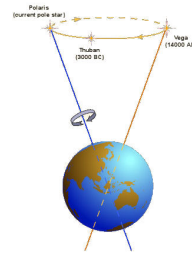
Punkt  $P$  — średni biegun świata,  $K$  nieruchomy biegun ekliptyki,  $T$  — średni punkt równonocy wiosennej, wszystkie punkty odpowiadają tej samej epoce  $t$ .

- łuk  $KP = \epsilon$ ,
- gwiazda  $X$  ma współrzędne  $(\alpha, \delta)$ , łuk  $PX = 90^\circ - \delta$ , kąt  $KPX = 90^\circ + \alpha$ ,
- w układzie ekliptycznym gwiazda ma współrzędne  $(\lambda, \beta)$ , mamy też  $KX = 90^\circ - \beta$  i  $PKX = 90^\circ - \lambda$ .

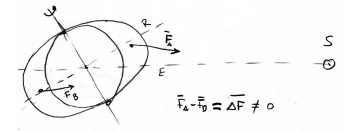
## Część I

## PRECESJA

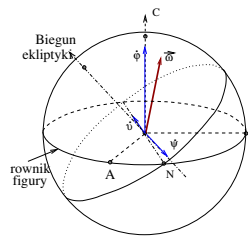
### Precesyjny ruch biegunów niebieskich



Precesyjny ruch biegunów to zjawisko wywołane wpływem czynników zewnętrznych na wirującą spłaszczoną Ziemię.



### Biegun średni, równik średni



Chwilowa prędkość kątowa regularnego ruchu wirowego Ziemi jest wektorową sumą stałych składowych  $\dot{\psi}_r, \dot{\theta}_r, \dot{\phi}_r$ .

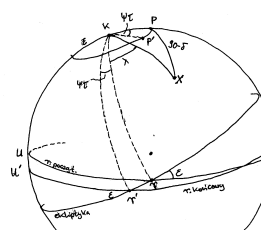
$$\vec{\omega}_r = (\dot{\psi}_r, \dot{\theta}_r, \dot{\phi}_r)$$

Punkty przecięcia kierunku wektora chwilowej regularnej prędkości  $\vec{\omega}_r$  ze sferą niebieską nazywamy **średnimi biegunami świata** danej epoki.

Sprzężone z tymi biegunami koło wielkie nosi miano **średniego równika**.

$\dot{\psi}_r$  — opisuje precesję L-S średnich biegunów świata.

### Precesja L-S (2)

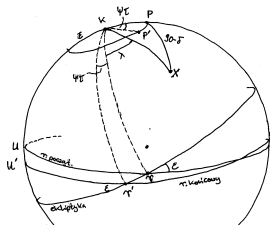


Precesja luni-solarna jest dominującym efektem precesyjnym, powoduje ruch bieguna świata wokół bieguna ekliptyki po kole małym  $PP'$  w czasie około 26000 lat.  $\psi$  — **roczna precesja w długości**.

Roczne tempo tego ruchu wynosi  $\psi \approx 50''/\text{rok}$ .

Opis ten jest przybliżeniem gdyż biegun ekliptyki  $K$  nie jest nieruchomy, podlega precesji planetarnej, ale w krótkich interwałach czasu (1-2 lata) przybliżenie to jest uzasadnione.

Precesja L-S (3)



$P'$  jest położeniem bieguna świata w momencie  $t + \tau$ , kąt  $PKP' = \psi\tau$ .

Nowy równik przebiega przez punkty  $U', T', V'$ .

$T'$  jest nowym punktem równonocy.

$PKT' = P'KT' = 90^\circ$  natomiast łuk  $T'T' = \psi\tau$ .

W takim ujęciu, równonoc porusza się po ekliptyce ruchem wstęcznym z jednostajną szybkością  $\psi$ .

Precesja L-S we współrzędnych równikowych (1)

Zmiany we współrzędnych równikowych są bardziej złożone. Dla trójkąta  $PKX$  z wzoru cosinusów mamy

$$\sin \delta = \cos \epsilon \sin \beta + \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda$$

Ponieważ jedynie  $\delta$  i  $\lambda$  są zmienne, stąd różniczkując obie strony równania otrzymamy

$$\cos \delta d\delta = \sin \epsilon \cos \beta \cos \lambda d\lambda \quad (2)$$

Stosując do trójkąta  $PKX$  wzór sinusów otrzymamy

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha. \quad (3)$$

Możemy więc wyeliminować współrzędne ekliptyczne w (2), a korzystając z (1) uzyskamy

$$d\delta = \psi\tau \sin \epsilon \cos \alpha \quad (4)$$

Tempo precesji L-S

Roczne tempo precesji L-S można opisać w kategoriach dynamiki Newtonowskiej i małej poprawki relatywistycznej rzędu  $\sim 0.02''$ , zwanej precesją geodezyjną. Z ogólnej teorii względności wynika bowiem, że inercjalny układ odniesienia w pobliżu orbitującej Ziemi posiada niewielką rotację względem inercjalnego układu heliocentrycznego. Rotacja ta wchodzi do obliczeń  $\psi$ .

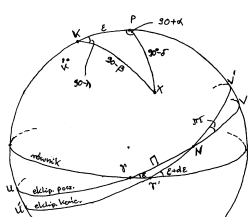
Wartość  $\psi$  zależy od szeregu parametrów jak: dynamiczna figura Ziemi, nachylenie ekliptyki do równika, masy oraz elementy orbit Słońca i Księżyca.

W szczególności,  $\psi$  jest wprost proporcjonalne do  $\cos \epsilon$ , a ponieważ nachylenie ekliptyki do równika wykazuje drobne zmiany wiekowe (z powodu precesji planetarnej) w konsekwencji i  $\psi$  zmienia swą wartość. Z teorii precesji wynika, że roczna precesja w długości ekliptycznej

$$\psi = 50''.3878 + 0''.0049T \quad (6)$$

gdzie  $T$  to czas w stuleciach od epoki fundamentalnej J2000,  $T = (t - 2000)/100$ .

Precesja planetarna (2)



Tym razem biegun świata  $P$  będzie nieruchomy,  $K$  i  $T$  będą biegunem ekliptyki i równonocą w pewnej epoce początkowej.  $K', T'$  będą punktami z epoki o niewielki interwał  $\tau$  późniejszej.

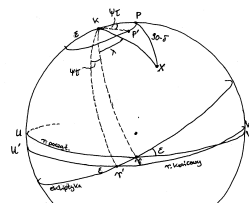
"Starą" ekliptyką jest koło  $UTV$ , nową koło  $U'T'V'$ . Dwie ekliptyki przecinają się w punktach  $N$  i  $N'$ , na rysunku pokazano tylko punkt  $N$ .

Ruch ekliptyki można sobie wyobrażać jako jej powolny obrót wokół osi  $NN'$ .

Tempo tego ruchu wynosi  $\pi = 0''.5$  na rok. A zatem łuk  $T'T' = \pi\tau$ .

Położenie osi obrotu  $NN'$  określone jest przez jej długość ekliptyczną  $\Pi$  względem ekliptyki początkowej. Stąd  $T'N = \Pi$ . Zauważmy też, że  $N$  i  $N'$  są biegunami łuku  $KK'$  jaki biegun ekliptyki zakreśla na sferze niebieskiej.

Precesja L-S (4)



Zmiany współrzędnych gwiazdy wywołane precesją L-S są nieskomplikowane w układzie współrzędnych ekliptycznych. Skoro założyliśmy, że biegun ekliptyki  $K$  jest nieruchomy, stąd z powodu precesji L-S nie mamy żadnych zmian szerokości ekliptycznej gwiazdy.

Z drugiej strony punkt  $T$  przemieszcza się o  $\psi\tau$  wzdłuż ekliptyki, czyli z powodu precesji L-S długość ekliptyczna wszystkich gwiazd zwiększa się o tą samą wartość.

Zatem

$$\begin{aligned} d\lambda &= \psi\tau \\ d\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Precesja L-S we współrzędnych równikowych (2)

Zmianę w rektascensji otrzymamy różniczkując równanie (3).

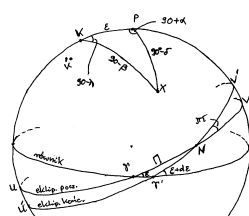
Eliminacji sinusów i cosinusów kątów  $\lambda, \beta$  dokonąć można stosując do trójkąta  $PKX$  stosowny wzór pięcioelementowy i dodatkowo równania (1) i (4).

Ostatecznie otrzymamy

$$d\alpha = \psi\tau(\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \tan \delta) \quad (5)$$

Równania (4) i (5) określają jedynie przybliżone precesyjne zmiany w  $\alpha$  i  $\delta$ , dlatego ich stosowność ograniczona jest do interwałów rzędu jednego roku.

Precesja planetarna (1)

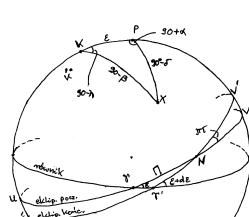


Planety wywierają zaniedbywalny wpływ na położenie osi rotacji Ziemi. Jednakże perturbacje od planet wyraźnie wpływają na heliocentryczną orbitę Ziemi. Elementy orbity Ziemi zmieniają się w czasie, w szczególności zmian doznaje położenie płaszczyzny orbity.

Ekliptyka zdefiniowana jest jako rezultat uśrednienia płaszczyzny orbitalnej barycentrum układu Ziemia-Księżyc. Jako taka nie podlega wpływom krótkookresowym, a jedynie wiekowym.

Wynikające stąd zmiany układu odniesienia, zmiany precesyjne, nazywane **precesją planetarną**, z definicji nie zawierają żadnych członów nutacyjnych.

Precesja planetarna (3)



Na  $(\alpha, \delta)$  precesja planetarna wpływa w bardzo prosty sposób. Skoro biegun  $P$  jest teraz nieruchomy to  $d\delta = 0$ .

Równonoc przemieszcza się po łuku  $T'T'$  o kąt  $\lambda'\tau$ .  $\lambda'$  zwana jest **roczną precesją planetarną** w rektascensji. Zatem w efekcie precesji planetarnej

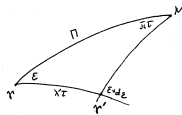
$$\begin{aligned} d\alpha &= -\lambda'\tau \\ d\delta &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Parametr  $\lambda'$  daje się wyznaczyć z trójkąta sferycznego  $T'T'N$ .

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (1)

Jak widzimy:

- $\tau N = \Pi, \tau \tau' = \lambda' \tau,$
- $\tau N \tau' = \pi \tau, N \tau \tau' = \varepsilon,$
- $\tau \tau' N = 180^\circ - (\varepsilon + d\varepsilon).$



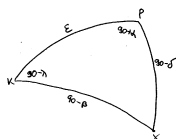
Ze wzoru sinusów mamy

$$\sin \Pi \sin(\pi \tau) = \sin(\lambda' \tau) \sin(\varepsilon + d\varepsilon)$$

Dla  $\tau$  dostatecznie małego,  $\sin(\pi \tau) \approx \pi \tau,$   $\sin(\lambda' \tau) \approx \lambda' \tau$  oraz  $\sin(\varepsilon + d\varepsilon) \approx \sin \varepsilon,$  wówczas będzie

$$\lambda' = \pi \sin \Pi \csc \varepsilon \quad (8)$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (3)



Z trójkąta sferycznego  $KPX$  wyprowadzimy wzory na zmiany współrzędnych  $(\lambda, \beta)$  wywołane precesją planetarną.

Zmiany te muszą być wyrażone w postaci różniczek np.  $d\beta$ , zatem potrzeba nam wyrażenia postaci  $\sin \beta = \dots$  lub  $\cos \beta = \dots$ . W trójkącie  $KPX$  ze wzoru cosinusów mamy

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

Różniczkując to równanie dostaniemy

$$\cos \beta d\beta = -(\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha) d\varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta \cos \alpha d\alpha \quad (10)$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (5)

Podstawiając te wyrażenia do równania (10) na  $\cos \beta d\beta$  dostaniemy

$$\cos \beta d\beta = -(\sin \varepsilon \sin \beta \cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \beta + \cos \beta \cos^2 \varepsilon \sin \lambda) d\varepsilon - (-\lambda' \tau) \sin \varepsilon \cos \beta \cos \lambda$$

Po obustronnym podzieleniu przez  $\cos \beta$ , redukcji podobnych wyrazów, zastosowaniu wzoru jedynkowego otrzymamy

$$d\beta = -\sin \lambda d\varepsilon + \lambda' \tau \sin \varepsilon \cos \lambda.$$

Korzystając z równań (8) i (9), po paru przekształceniach przekonamy się, że

$$d\beta = \pi \tau \sin(\Pi - \lambda) \quad (11)$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (7)

$$d\lambda = \pi \tau \left[ \sin \Pi \tan \beta \cdot \frac{1}{\sin \lambda} - \tan \beta \cot \lambda \sin(\Pi - \lambda) - \cot \varepsilon \sin \Pi \right]$$

w kroku następnym otwieramy  $\sin(\Pi - \lambda)$  i z pierwszych dwóch składników wyłączamy przed nawias  $\tan \beta$

$$d\lambda = \pi \tau \left[ \tan \beta \left( \sin \Pi \cdot \frac{1}{\sin \lambda} - \sin \Pi \cot \lambda \cos \lambda + \cos \Pi \cot \lambda \sin \lambda \right) - \cot \varepsilon \sin \Pi \right]$$

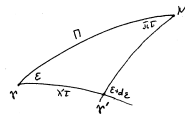
po wyłączeniu  $\sin \Pi$  z dwóch pierwszych wyrazów w nawiasach okrągłych

$$d\lambda = \pi \tau \left[ \tan \beta \left( \sin \Pi \cdot \frac{1 - \cos^2 \lambda}{\sin \lambda} + \cos \Pi \cos \lambda \right) - \sin \Pi \cot \varepsilon \right]$$

czyli

$$d\lambda = \pi \tau [\tan \beta (\sin \Pi \sin \lambda + \cos \Pi \cos \lambda) - \sin \Pi \cot \varepsilon]$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (2)



Wyznamy teraz zmianę nachylenia  $d\varepsilon$  ekliptyki do równika. Stosując do trójkąta  $\tau \tau' N$  wzór cztero-elementowy otrzymamy

$$\cos \varepsilon \cos(\lambda' \tau) = \sin(\lambda' \tau) \cot \Pi + \sin \varepsilon \cot(\varepsilon + d\varepsilon)$$

Po przemnożeniu przez  $\sin(\varepsilon + d\varepsilon)$

$$\sin(\varepsilon + d\varepsilon) \cos \varepsilon \cos(\lambda' \tau) - \cos(\varepsilon + d\varepsilon) \sin \varepsilon = \sin(\lambda' \tau) \cot \Pi \sin(\varepsilon + d\varepsilon)$$

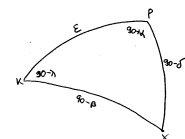
Stosując przybliżenia małych kątów  $\cos(\lambda' \tau) \approx 1, \sin(\lambda' \tau) \approx \lambda' \tau,$  wykorzystując w lewej stronie tożsamość dotyczącą sinusa sumy dwóch kątów, korzystając jeszcze z równania (8) otrzymamy

$$\sin d\varepsilon = \pi \tau \cos \Pi \frac{\sin(\varepsilon + d\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$$

Przy założeniach:  $\sin d\varepsilon \approx d\varepsilon$  oraz  $\sin(\varepsilon + d\varepsilon) \approx \sin \varepsilon$  dostaniemy

$$d\varepsilon = \pi \tau \cos \Pi \quad (9)$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (4)



Aktualnie "pracujemy" we współrzędnych ekliptycznych dlatego trzeba wyeliminować stąd współrzędne równikowe. I tak, za pomocą równań (3) i (7) pozbywamy się wyrażenia  $\cos \delta \cos \alpha d\alpha$ , a ze wzoru cosinusów zastosowanego do boku  $(90^\circ - \delta)$  w trójkącie  $PKX$  usuniemy  $\sin \delta$ :

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

wreszcie, pozostając w trójkącie  $PKX$  i posługując się wzorem 5-cio elementowym, wyrugujemy  $\cos \delta \sin \alpha$

$$\sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ - \beta) \sin \varepsilon - \sin(90^\circ - \beta) \cos \varepsilon \cos(90^\circ - \lambda)$$

czyli

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (6)

Wyrażenie na  $d\lambda$  otrzymamy różniczkując równanie (3)

$$\cos \beta \sin \lambda d\lambda = \cos \delta \sin \alpha d\alpha - \sin \beta \cos \lambda d\beta$$

Czynnik  $\cos \delta \sin \alpha$  już wiemy jak wyeliminować, mamy też, że  $d\alpha = -\lambda' \tau.$

Z kolei  $(-\lambda')$  można zastąpić prawą stroną równania (8), natomiast zamiast  $d\beta$  możemy wziąć prawą stronę równania (11) — po podstawieniach

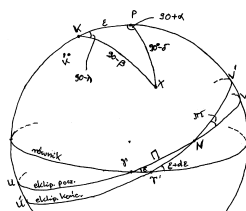
$$\cos \beta \sin \lambda d\lambda = (-\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda) \cdot (-\pi \tau \sin \Pi \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon}) - \sin \beta \cos \lambda \cdot \pi \tau \sin(\Pi - \lambda)$$

Po wymnożeniu wyrażań w nawiasach, obustronnym podzieleniu przez  $\cos \beta \sin \lambda$ , mamy

$$d\lambda = \pi \tau \frac{1}{\sin \lambda} \sin \Pi \tan \beta - \pi \tau \cot \varepsilon \sin \Pi - \pi \tau \tan \beta \cot \lambda \sin(\Pi - \lambda)$$

$$d\lambda = \pi \tau \left[ \sin \Pi \tan \beta \cdot \frac{1}{\sin \lambda} - \tan \beta \cot \lambda \sin(\Pi - \lambda) - \cot \varepsilon \sin \Pi \right]$$

Precesja planetarna wpływ w  $\lambda, \beta$  (8)



a dalej mamy

$$d\lambda = \pi \tau [\tan \beta \cos(\Pi - \lambda) - \sin \Pi \cot \varepsilon]$$

Ostatecznie, wpływ precesji planetarnej na współrzędne ekliptyczne gwiazd wyraża się wzorami

$$d\lambda = -\lambda' \tau \cos \varepsilon + \pi \tau \tan \beta \cos(\Pi - \lambda) \\ d\beta = \pi \tau \sin(\Pi - \lambda) \quad (12)$$

Na rysunku kąt  $\Pi$  naniesiono jako kąt ostry (prostszy rysunek). Tymczasem w rzeczywistości punkt  $N$  leży w pobliżu punktu równonocy jesiennej oraz  $\Pi \approx 175^\circ.$

Uproszczenie nie ma wpływu na wyprowadzone wyżej rezultaty. Jedynie zmiany nachylenia ekliptyki do równika są inne niż można by wnioskować z rysunku. Aktualnie, nachylenie to w miarę upływu czasu maleje.

**Precesja planetarna, parametry  $\lambda', \pi, \Pi$**

Roczne tempo  $\lambda'$  precesji planetarnej wyrażone jest za pomocą parametrów  $\pi$  i  $\Pi$ . Oba parametry nie są stałymi absolutnymi. Ich wartości dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \Pi &= 174^{\circ}8764 + 0^{\circ}9137T \\ \pi &= 0^{\circ}4700 - 0^{\circ}007T \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie  $T$  — to czas liczony w stuleciach od epoki J2000.

Parametr  $\lambda'$  (roczna zmiana w rektascensji z powodu precesji planetarnej) oraz  $\varepsilon$  (nachylenie ekliptyki do równika) z wystarczającą dokładnością dają się policzyć z formuł

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0^{\circ}1055 - 0^{\circ}0189T \\ \varepsilon &= 23^{\circ}26'21''45 - 46''81T \end{aligned} \quad (14)$$

**Precesja ogólna w  $\alpha, \delta$  i  $\lambda, \beta$**

Wprowadzając nowe stałe precesyjne

$$\begin{aligned} m &= \psi \cos \varepsilon - \lambda' \\ n &= \psi \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (16)$$

zamiast równań (15) mamy

$$\begin{aligned} d\alpha &= m\tau + n\tau \sin \alpha \tan \delta \\ d\delta &= n\tau \cos \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

Stałe  $m$  i  $n$  nazywane są **roczną precesją w rektascensji i deklinacji**, odpowiednio.

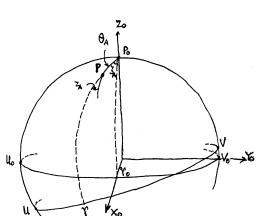
Podobnie dla współrzędnych  $(\lambda, \beta)$ , łącząc równania (1) i (12) dostaniemy

$$\begin{aligned} d\lambda &= p\tau + \pi\tau \tan \beta \cos(\Pi - \lambda) \\ d\beta &= \pi\tau \sin(\Pi - \lambda) \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie  $p$  — jest **roczną precesją ogólną** (w długości ekliptycznej).

$$p = \psi - \lambda' \cos \varepsilon \quad (19)$$

**Precesja ogólna, podejście ściśle (1)**



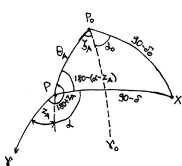
Observacje wykonane w odległych od siebie momentach czasu muszą być sprowadzane do wspólnego układu odniesienia za pomocą innych formuł aniżeli (17), (18).

Podamy tego typu transformację dotyczącą współrzędnych równikowych tej samej gwiazdy, z epoki  $t$  do epoki standardowej  $t_0$ .

Punkty  $P_0$  i  $T_0$  oznaczają biegun świata i punkt równonocy z epoki  $t_0$ . Równik dla tej epoki jest kołem wielkim  $U_0T_0V_0$ . W epoce  $t_0$  gwiazda ma współrzędne  $(\alpha_0, \delta_0)$ .

Niech  $P$  będzie położeniem bieguna świata w epoce  $t$ . Łuk  $P_0P = \theta_A$ , jest łukiem koła wielkiego, ale nie reprezentuje on trajektorii po jakiej przesuwają się biegun  $P$ , łuk ten jedynie jest jej dość bliski.

**Precesja ogólna, podejście ściśle (3)**



Oznaczmy przez  $(\alpha, \delta)$  współrzędne gwiazdy  $X$  względem nowego równika i równonocy. Mamy  $\alpha = \angle PX$ , co pociąga  $P_0PX = 180^\circ - (\alpha - Z_A)$  oraz  $PX = 90^\circ - \delta$ .

Ustaliśmy pięć elementów trójkąta sferycznego  $P_0PX$ :

- $P_0P = \theta_A, P_0X = 90^\circ - \delta_0,$
- $PP_0X = \alpha + \zeta_A, PX = 90^\circ - \delta,$
- $P_0PX = 180^\circ - (\alpha - Z_A).$

Możemy teraz powiązać ze sobą współrzędne  $(\alpha_0, \delta_0)$  z epoki  $t_0$  ze współrzędnymi  $(\alpha, \delta)$  z epoki  $t$ . W podanych formułach będą tkwiły parametry kątowe  $\theta_A, \zeta_A, Z_A$ .

**Precesja ogólna**

Podejście stosowane do opisu precesji planetarnej jest przybliżeniem. Przyjęto w nim, że równik niebieski jest nieruchomy, ignorując fakt jego ruchu w efekcie precesji luni-solarnej. Jednak przybliżenie to daje użyteczne rezultaty.

Precesja łączna — tzw. **precesja ogólna** — wynikająca ze zmian położenia zarówno równika jak i ekliptyki może być traktowana jako superpozycja precesji luni-solarnej i planetarnej. Zasada superpozycji będzie jednak ważna jedynie w niewielkim interwale czasu  $\tau$ .

Rozważmy precesję ogólną we współrzędnych  $(\alpha, \delta)$  gwiazdy. Dodając równania (4) i (5) do równań (7) otrzymamy

$$\begin{aligned} d\alpha &= \psi\tau(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta) - \lambda'\tau \\ d\delta &= \psi\tau \sin \varepsilon \cos \alpha + 0 \end{aligned} \quad (15)$$

**Stałe precesji ogólnej**

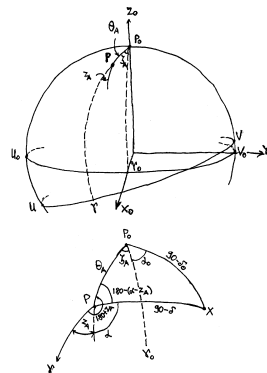
Stałe  $m, n, p$  nie są stałymi absolutnymi bowiem doznają zmian wiekowych. Na podstawie formuł podanych wcześniej można napisać:

$$p = 50^{\circ}2910 + 0^{\circ}0222T \quad (20)$$

$$\begin{aligned} m &= 3^{\circ}07496 + 0^{\circ}00186T \\ n &= 1^{\circ}33621 - 0^{\circ}00057T = 20^{\circ}0431 - 0^{\circ}0085T \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie  $T$  — interwał czasu liczony w stuleciach od epoki J2000.

**Precesja ogólna, podejście ściśle (2)**



Ruch bieguna  $P$ , przynajmniej na początku, odbywał się wzdłuż koła wielkiego  $P_0T_0$ . W konsekwencji kąt  $PP_0T_0$  będzie małym kątem, dążącym do zera gdy  $(t - t_0)$  dąży do zera. Oznaczamy go przez  $\zeta_A$ .

W epoce początkowej rektascensja  $\alpha_0 = T_0P_0X$  a w trójkącie  $PP_0X$  mamy, że  $PP_0X = \alpha_0 + \zeta_A$  oraz  $P_0X = 90^\circ - \delta_0$ .

Niech  $UTV$  będzie równikiem w epoce  $t$ ,  $T$  będzie nową równonocą. Z powodu, dla którego kąt  $PP_0T_0$  uważać można za mały, kąt  $\angle PP_0T_0$  będzie bliski  $180^\circ$ . Mamy zatem, że  $\angle PP_0T_0 = 180^\circ + Z_A$ .

Oba kąty  $\zeta_A, Z_A$  — są to małe kąty dodatnie, a w interwale czasu  $(t - t_0)$  są one identyczne co do rzędu pierwszego.

**Precesja ogólna, podejście ściśle (4)**

Za pomocą wzorów 5-cio elementowego, wzoru sinusów i wzoru cosinusów, odpowiednio, mamy

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos(\alpha - Z_A) &= \cos \theta_A \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin \theta_A \sin \delta_0 \\ \cos \delta \sin(\alpha - Z_A) &= \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) \\ \sin \delta &= \sin \theta_A \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta_A \sin \delta_0 \end{aligned} \quad (22)$$

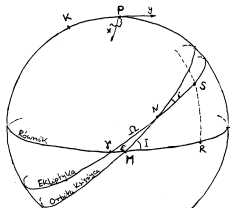
oraz wzory odwrotne

$$\begin{aligned} \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos \theta_A \cos \delta \cos(\alpha - Z_A) + \sin \theta_A \sin \delta \\ \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos \delta \sin(\alpha - Z_A) \\ \sin \delta_0 &= -\sin \theta_A \cos \delta \cos(\alpha - Z_A) + \cos \theta_A \sin \delta \end{aligned} \quad (23)$$

Wzory (22) i (23) są ściśle, nie dokonaliśmy w trakcie ich wyprowadzania żadnych założeń upraszczających.



k we współrzędnych ekliptycznych (1)

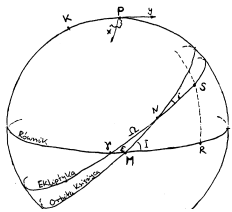


N jest węzłem wstępującym orbity Księżyca na ekliptyce, M jest węzłem wstępującym tej orbity na równiku. S oznacza Słońce,  $\angle NM = i$ ,  $\angle N = \Omega$ ,  $\angle \Gamma M = \varepsilon$ . Zakładamy ruch Ziemi po orbicie kołowej oraz  $\beta_S = 0$ , wówczas  $\angle \Gamma S = \lambda_S = L$ , gdzie L — oznacza średnią długość Słońca w orbicie.

W rezultacie na współrzędne Słońca ( $\alpha_S, \delta_S$ ) mamy wyrażenia

$$\begin{aligned} \cos \alpha_S \cos \delta_S &= \cos L \\ \sin \delta_S &= \sin L \sin \varepsilon \\ \sin \alpha_S \cos \delta_S &= \sin L \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (31)$$

Zmiany położenia chwilowego bieguna świata (1)



By dyskutować zmiany położenia bieguna P, dobrym pociągnięciem jest posłużenie się układem współrzędnych określonym w oparciu o jakieś wybrane, ustalone położenie bieguna. Niech wektor  $\mathbf{s}(x, y, z)$  będzie określał położenie bieguna na sferze, względem osi równikowych, określonych za pomocą średniego bieguna i średniej równonocy z epoki początkowej, kiedy długość Słońca  $L = 0$ .

Zmiany położenia chwilowego bieguna świata — wpływ Słońca (1)

Po scałkowaniu wszystkich składowych mamy, że po upływie czasu t od momentu odpowiadającego położeniu początkowemu, współrzędne bieguna w przybliżeniu wynoszą

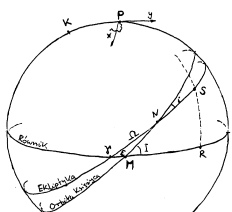
$$\begin{aligned} x \csc \varepsilon &= \psi_1 t - 0.5 \cdot \psi_1 \left(\frac{dL}{dt}\right)^{-1} \sin 2L \\ y &= 0.5 \psi_1 \tan \varepsilon \left(\frac{dL}{dt}\right)^{-1} \cos 2L \\ z &= 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Wyrażenie  $x \csc \varepsilon$  jest przemieszczeniem bieguna w długości, y natomiast opisuje przystos w nachyleniu ekliptyki do równika.

W równaniach (33) można wyróżnić różne czony, liniowy ze względu na czas wyraz  $\psi_1$  stanowiący przyczynek od precesji słonecznej (stanowi on około 1/3 wpływu) oraz dwa wyrazy nutacyjne, jeden w długości, drugi w nachyleniu.

Oba czony nutacyjne mają okres półroczny.

Wpływ nutacyjny Księżyca



Podobnych rozważań można dokonać dla Księżyca. Korzystając z rezultatów uzyskanych w przypadku Słońca, wektor  $\mathbf{k}'$  — czyli moment skracający pochodzący od Księżyca ma składowe

$$\mathbf{k}' = k_0' \sin I [\cos I (1 - \cos 2L'), - \sin 2L', 0] \quad (34)$$

gdzie I nachylenie orbity Księżyca do równika,  $L'$  jest kątową odległością Księżyca od punktu M.

Równanie (34) określa składowe momentu sił pochodzącego od Księżyca w układzie związanym z płaszczyzną orbity Księżyca. Co oznacza, że układ współrzędnych ( $x', y', z'$ ) w jakim wyrażono składowe wektora  $\mathbf{k}'$  nie jest standardowym układem równikowym. Wprawdzie oś z tego układu jest skierowana na biegun świata, ale oś x skierowana jest do punktu M a nie do punktu równonocy  $\Upsilon$ .

Zmiany położenia chwilowego bieguna — wpływ Księżyca

$$\mathbf{k}' = k_0' \sin I [\cos I (1 - \cos 2L'), - \sin 2L', 0]$$

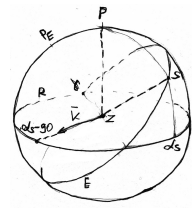
Równanie to możemy potraktować tak jak równanie (32). Po scałkowaniu składowych ( $dx', dy', dz'$ ) otrzymamy, że po upływie czasu t od momentu początkowego, współrzędne bieguna w przybliżeniu wyniosą

$$\begin{aligned} x' \csc I &= \psi_1' t - 0.5 \cdot \psi_1' \left(\frac{dL'}{dt}\right)^{-1} \sin 2L' \\ y' &= 0.5 \psi_1' \tan I \left(\frac{dL'}{dt}\right)^{-1} \cos 2L' \\ z' &= 1 \end{aligned} \quad (35)$$

Mamy tu wyraz quasi-precesyjny  $\psi_1' = k_0' \cos I$  oraz dwa wyrazy nutacyjne o okresach równych połowie miesiąca księżycowego, około 14 dni.

Jednak nie są to największe wyrazy nutacyjne. Są one mniejsze od głównych wyrazów słonecznych, mimo iż  $k_0' = 2k_0$ . Przyczyną jest czynnik  $(dL'/dt)^{-1}$ , który jest blisko 12 razy mniejszy od jego słonecznego odpowiednika. Okazuje się, że główne wyrazy nutacyjne ruchu bieguna świata tkwią w tym co określono wyżej jako czlon quasi-precesyjny  $\psi_1'$ . Wyjaśnimy to nieco szerzej.

k we współrzędnych ekliptycznych (2)

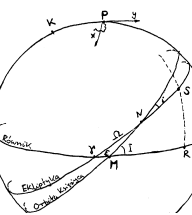


Kładąc związki (31) do (30) dostaniemy  $\mathbf{k} = 2k_0 \sin L \sin \varepsilon [\sin L \cos \varepsilon, - \cos L, 0]$  a dalej  $\mathbf{k} = k_0 \sin \varepsilon [\cos \varepsilon (1 - \cos 2L), - \sin 2L, 0] \quad (32)$

Wektor momentu pędu ruchu wirowego Ziemi jest skierowany ku punktowi P, czyli ku chwilowemu biegunowi świata.

Moment skracający  $\mathbf{k}$  jest prostopadły do kierunku chwilowej osi obrotu Ziemi i dlatego nie może zmienić długości wektora momentu pędu Ziemi. Może jednak zmienić jego kierunek, a więc położenie bieguna P.

Zmiany położenia chwilowego bieguna świata (2)



Wówczas, jako że mamy do czynienia z drobnymi ruchami, zmiany składowych wektora  $\mathbf{s}$  będą proporcjonalne do składowych wektora  $\mathbf{k}$ , a stąd

$$\begin{aligned} dx &= k_0 \cos \varepsilon \sin \varepsilon [1 - \cos 2L] \cdot dt \\ dy &= k_0 \cos \varepsilon \tan \varepsilon [- \sin 2L] \cdot dt \\ dz &= 0 \cdot dt \end{aligned}$$

albo dla składowej x

$$\begin{aligned} dx \frac{1}{\sin \varepsilon} &= \psi_1 dt - \psi_1 \cos 2L \cdot dt \\ x \csc \varepsilon &= \psi_1 t - 0.5 \cdot \psi_1 \left(\frac{dL}{dt}\right)^{-1} \sin 2L \end{aligned}$$

gdzie  $\psi_1 = k_0 \cos \varepsilon$  jest stałą zależną m.in. od nachylenia ekliptyki do równika.

Zmiany położenia chwilowego bieguna świata — wpływ Słońca(2)

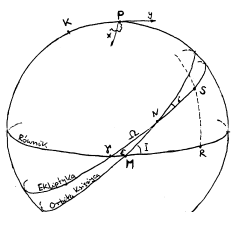
W równaniu (33) mogłyby się pojawić dalsze wyrazy pochodzenia czysto słonecznego. Pojawiają się one jeśli do odpowiednich formuł wprowadzimy roczne zmiany odległości Ziemi od Słońca czyli po uwzględnieniu mimośrodru orbity Ziemi np. do wyrazów rzędu pierwszego.

Wówczas w wyniku sprzężeń z wyrazem precesyjnym powstaną nowe wyrazy nutacyjne o okresie jednego roku. A wskutek sprzężeń z istniejącymi już członami nutacyjnymi, powstaną dodatkowe dwa czony nutacyjne o okresach roku i czterech miesięcy, itd.

Zatem, moment skracający  $\mathbf{k}$ , którego źródłem jest jedynie grawitacja Słońca, nie generuje dominującego wyrazu nutacyjnego o okresie 18.6 lat i amplitudzie 17'' jaki obserwujemy badając zmienność współrzędnych gwiazd.



Wpływ nutacyjny składowej księżycowej  $\psi_1'$  (1)



Węzeł  $N$  średniej orbity Księżyca porusza się po ekliptyce ruchem wstęcznym z okresem 18.6 lat. Dlatego kierunek osi  $x'$ , (punkt  $M$ ), nie jest stały, oscyluje wokół kierunku średniego. Ponieważ nachylenie  $i$  orbity Księżyca do ekliptyki jest nieduże ( $\sim 5^\circ$ ), nieduży będzie zakres tych oscylacji. W konsekwencji, względem układu równikowego, składowa  $\psi_1' \cdot \sin I$  wektora  $k'$  wykazuje zmiany zarówno co do wielkości jak i kierunku.

Względem osi standardowego równikowego układu odniesienia składowa  $k_P$  wynosi

$$k_P = 0.5 \cdot k_0' \sin 2I (\cos \tau M, \sin \tau M, 0) \quad (36)$$

Wpływ nutacyjny składowej księżycowej  $\psi_1'$  (3)

Ostatnie równanie, z dokładnością do wyrazów I-rzędu przyjmie postać

$$l = \varepsilon + i \cos \Omega \quad (39)$$

Kładąc otrzymane wyrażenia na  $\sin \tau M$ ,  $\cos \tau M$  oraz  $l$  do równania (36) otrzymamy

$$k_P = 0.5 k_0' \sin [2(\varepsilon + i \cos \Omega)] [1, i \sin \Omega \csc \varepsilon, 0]$$

$$k_P = k_0' \sin (\varepsilon + i \cos \Omega) \cos (\varepsilon + i \cos \Omega) [1, i \sin \Omega \csc \varepsilon, 0]$$

$$k_P = k_0' [(\sin \varepsilon \cos (i \cos \Omega) + \cos \varepsilon \sin (i \cos \Omega)) \cdot (\cos \varepsilon \cos (i \cos \Omega) - \sin \varepsilon \sin (i \cos \Omega))] [1, i \sin \Omega \csc \varepsilon, 0]$$

Ponieważ  $i \cos \Omega$  są wielkościami małymi pierwszego rzędu, możemy położyć  $\cos (i \cos \Omega) \approx 1$  oraz  $\sin (i \cos \Omega) \approx i \cos \Omega$ . Odrzucając jeszcze wyrazy drugiego rzędu ze względu na  $(i \cos \Omega)$ , uzyskamy

$$k_P = k_0' (\sin \varepsilon \cos \varepsilon + i \cos \Omega \cos 2\varepsilon) [1, i \sin \Omega \csc \varepsilon, 0] \quad (40)$$

Kończymy dyskusję przebiegu zjawiska nutacji. To co powiedziano wyżej miało na celu ukazanie w jaki sposób powstają najważniejsze człony precesyjne i nutacyjne.

Pełna teoria precesji i nutacji jest bardzo skomplikowana i wykracza poza ramy podstawowego kursu astronomii sferycznej.

Jeszcze nie tak dawno teoria nutacji oparta była na modelu sztywnej Ziemi. Równania (33) i (41) odpowiadają takiemu właśnie podejściu.

W roku 1980 opublikowano nową teorię nutacji, którą w dwa lata później zaaprobowala MUA. Teoria ta oparta jest na bardziej realistycznym modelu Ziemi, modelu elastycznym osiowo niesymetrycznym. Jest to tzw. pełna teoria nutacji zawierająca po 106 wyrazów zarówno w długości jak i w nachyleniu.

W tej teorii przemieszczenie bieguna świata w długości oznaczono przez  $\Delta\psi$ , przemieszczenie prostopadłe do niego przez  $\Delta\varepsilon$ . Przemieszczenia te nazwano **nutacją w długości** i **nutacją w nachyleniu**, odpowiednio. W naszej poprzedniej notacji odpowiadają one składowym  $x \csc \varepsilon$  i  $y$ .

W teorii z 1980 roku główne człony nutacyjne dyskutowane w tym rozdziale dane są formułami :

$$\Delta\psi = -17''1996 \sin \Omega - 1''3187 \sin (2F - 2D + 2\Omega) - 0''2274 \sin (2F + 2\Omega) + 0''2062 \sin (2\Omega)$$

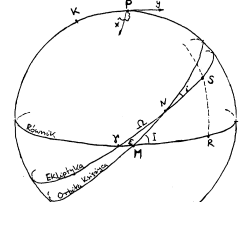
$$\Delta\varepsilon = 9''2025 \cos \Omega + 0''5736 \cos (2F - 2D + 2\Omega) + 0''0977 \cos (2F + 2\Omega) - 0''0895 \cos (2\Omega) \quad (43)$$

Współczynniki  $17''1996$  oraz  $9''2025$ , niekiedy nazywane są **stałymi nutacji**. Ich wartości jak i pozostałych współczynników w równaniu (43) odpowiadają epoce J2000.0 .

Niekiedy wygodnym jest podział na długo i krótkookresowe człony nutacyjne. Wyrazy długookresowe są to wyrazy niezależne od średniej długości  $L$  Księżyca, wszystkie te wyrazy mają okresy większe od 90 dni.

Pośród wyrazów krótkookresowych nie ma ani jednego o okresie większym od 35 dni. Zsumowane wyrazy krótkookresowe oznaczane są przez  $d\psi$  i  $d\varepsilon$ .

Wpływ nutacyjny składowej księżycowej  $\psi_1'$  (2)



Oszacujemy składowe  $k_P$  z dokładnością do wyrazów I-rzędu kąta nachylenia  $I$ . W trójkącie  $\tau MN$  ze wzoru sinusów

$$\sin \tau M \sin I = \sin \Omega \sin i \quad (37)$$

Przyjmujemy, że  $\varepsilon \approx I$  oraz  $\cos \tau M \approx 1$ , dlatego z wystarczającą dokładnością będzie

$$\sin \tau M = i \cdot \sin \Omega \csc \varepsilon$$

$$\cos \tau M = 1 \quad (38)$$

Z trójkąta  $\tau MN$  i wzoru czteroczęściowego można otrzymać

$$\cos \tau M \cos \varepsilon = \sin \tau M \cot \Omega + \sin \varepsilon \cot I$$

Wykorzystując (37) i przybliżenie  $\cos \tau M \approx 1$  mamy

$$\cos \varepsilon = \sin i \sin \Omega \csc \varepsilon \cot \Omega + \sin \varepsilon \cot I$$

$$\sin I \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos I = \sin i \cos \Omega$$

$$\sin (I - \varepsilon) = \sin i \cos \Omega$$

Wpływ nutacyjny składowej księżycowej  $\psi_1'$  (4)

$$k_P = k_0' [\sin \varepsilon \cos \varepsilon + i \cos \Omega \cos 2\varepsilon, i \sin \Omega \cos \varepsilon, 0]$$

Równanie to możemy potraktować tak jak równania (32), (34) Całkując zmiany  $dx, dy, dz$  położenia bieguna powodowane momentem  $k_P$  otrzymamy składowe przemieszczenia bieguna względem jego położenia początkowego

$$x \csc \varepsilon = \psi_1'' \cdot t + 2 i \psi_1'' \cot 2\varepsilon \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^{-1} \sin \Omega$$

$$y = -i \psi_1'' \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^{-1} \cos \Omega$$

$$z = 1 \quad (41)$$

gdzie  $\psi_1''$  jest stałą tak dobraną by reprezentowała wyraz precesyjny w długości. Tym razem składowe  $x, y, z$  wyrażone są w układzie współrzędnych równikowych.

W (41) można zidentyfikować księżycowy człon precesyjny jak i księżycowe wyrazy nutacyjne w długości i nachyleniu, ale tutaj mają one okresy 18.6 lat. Są to największe człony nutacyjne,  $\sim 10$  razy większe od 6-cio miesięcznych członów słonecznych, które jeśli chodzi o amplitudę są zaraz na drugim miejscu.

Pełna teoria nutacji podaje formuły na  $\Delta\psi$  i  $\Delta\varepsilon$  w formie szeregów postaci

$$\Delta\psi = \sum_{s=1}^{106} S_s \sin (a_s L + b_s L' + c_s F + d_s D + e_s \Omega)$$

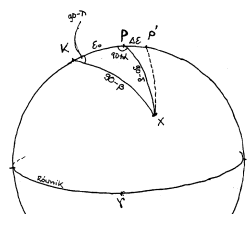
$$\Delta\varepsilon = \sum_{s=1}^{106} C_s \cos (a_s L + b_s L' + c_s F + d_s D + e_s \Omega) \quad (42)$$

gdzie  $a_s, b_s, c_s, d_s, e_s$  są liczbami całkowitymi,  $S_s, C_s$  to współczynniki amplitudowe poszczególnych członów nutacyjnych podane w formie tabel (Seidemann 1992), natomiast

- $L$  to średnia długość Księżyca minus średnia długość perigeum orbity Księżyca,
- $L'$  to średnia długość Słońca minus średnia długość preigeum orbity Słońca,
- $F$  jest średnią długością Księżyca pomniejszoną o średnią długość węzła orbity Księżyca,
- $D$  jest średnią długością Księżyca minus średnia długość Słońca, czyli średnią elongacją Księżyca od Słońca,
- $\Omega$  to długość średniego wstępującego węzła orbity Księżyca na ekliptyce mierzoną od punktu równonocy daty.

Wszystkie parametry  $L, L', F, D, \Omega$  zmieniają się w czasie (Seidemann 1992).

Nutacja a nachylenie ekliptyki do równika



Położenia punktów  $P, P', K, X$  odpowiadają pewnej dacie  $JD$ .

$P$  to średni biegun świata,  $P'$  biegun prawdziwy, przesunięty względem  $P$  wzdłuż łuku  $KP$  o kąt  $\Delta\varepsilon$ .

$X$  to gwiazda o  $(\lambda, \beta)$  lub  $(\alpha, \delta)$ .

$K$  to biegun ekliptyki daty  $JD$ , jego kątową odległość od  $P$  wynosi  $\varepsilon_0$  — nachylenie ekliptyki do średniego równika daty  $JD$ .

Kąt  $\varepsilon$  oznacza nachylenie ekliptyki do prawdziwego równika na moment  $JD$ . Wielkości te dane są formułami (Seidemann 1992)

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150 T - 0''.00059 T^2 + 0''.001813 T^3$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

$$T = (JD - 2451545.0) / 36525$$

Nutacja we współrzędnych sferycznych

W przypadku współrzędnych ekliptycznych wpływy nutacyjne przejawiają się bardzo prosto: do poprawionej na precesję luni-solarną długości ekliptycznej należy dodać  $\Delta\psi$  — nutację w długości, szerokość ekliptyczna nie ulega z powodu nutacji żadnym zmianom.

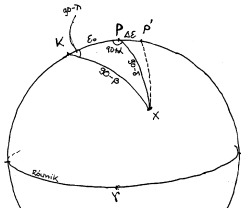
Inaczej ma się rzecz w przypadku współrzędnych równikowych.

Wpływ  $\Delta\psi$  można wydedukować natychmiast z równań (4) i (5), mianowicie

$$\begin{aligned} d\alpha &= \Delta\psi(\cos \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 \sin \alpha \tan \delta) \\ d\delta &= \Delta\psi \sin \varepsilon_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

Wpływem  $\Delta\varepsilon$  — nutacji w nachyleniu na  $\alpha, \delta$  musimy zająć się dodatkowo.

Nutacja  $\Delta\varepsilon$  w rektascensji i deklinacji (2)



Nawias w (46) eliminujemy za pomocą wzoru 5-cio elementowego

$$-\cos \delta \sin \alpha = \sin \beta \sin \varepsilon_0 - \cos \beta \sin \varepsilon_0 \sin \lambda$$

stąd 
$$d\delta = \Delta\varepsilon \sin \alpha \quad (47)$$

Ze wzoru sinusów w trójkącie PKX mamy

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

Różniczkując to równanie dostaniemy

$$\sin \alpha \cos \delta d\alpha + \cos \alpha \sin \delta d\delta = 0$$

Kładąc tu prawa stronę (47) otrzymamy wyrażenie na przyrost w rektascensji

$$d\alpha = -\Delta\varepsilon \cos \alpha \tan \delta \quad (48)$$

Nutacja w rektascensji i deklinacji, podejście wektorowe (1)

We współczesnej praktyce wpływy nutacji najczęściej uwzględnia się w formalizmie macierzowym. Niech  $\mathbf{s} = (x, y, z)$  będzie wektorem kierunku do gwiazdy, określonym względem kartezjańskich osi zdefiniowanych za pomocą średniego bieguna i średniej równonocy na daną datę JD.

Składowe wektora  $\mathbf{s}$  wynoszą

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix}$$

Niech  $\mathbf{s}' = [x', y', z']$  będzie wektorem tego samego kierunku, określonym w oparciu o prawdziwy równik i prawdziwy punkt równonocy odpowiadające danej dacie JD.

Precesja i nutacja — wpływ łączny macierzowo

Niech  $\mathbf{s}_0$  będzie wektorem położenia obiektu względem średniego równika i równonocy z epoki standardowej, np. J2000. Wówczas wektor  $\mathbf{s}$  jego położenia względem średniego układu daty JD obliczymy za pomocą (27)

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{s}_0$$

$\mathbf{P}$  jest precesyjną macierzą obrotu.

Współrzędne prawdziwe  $\mathbf{s}'$  obiektu na datę JD dostaniemy za pomocą (51)

$$\mathbf{s}' = \mathbf{N}\mathbf{s} = (\mathbf{N}\mathbf{P})\mathbf{s}_0 = \mathbf{R}\mathbf{s}_0 \quad (53)$$

Macierz  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{N}\mathbf{P}$  jest macierzą łączącą wpływ precesji i nutacji.

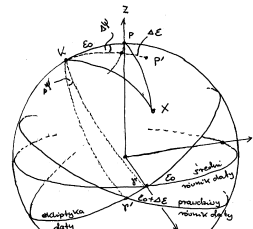
Transformacja odwrotna od współrzędnych prawdziwych daty JD do współrzędnych średnich epoki J2000, otrzymamy z (53) działając nań lewostronnie macierzą odwrotną  $\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_0 \quad (54)$$

Wobec ortogonalności macierzy obrotu  $\mathbf{R}$  mamy

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = (\mathbf{N}\mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{N}^T = \mathbf{r}(\zeta_A)\mathbf{q}(-\theta_A)\mathbf{r}(\zeta_A)\mathbf{p}(-\varepsilon_0)\mathbf{r}(\Delta\psi)\mathbf{p}(\varepsilon) \quad (55)$$

Nutacja w rektascensji i deklinacji, podejście wektorowe (2)



Transformacja wektora  $\mathbf{s}$  ze średniego układu równikowego w wektor  $\mathbf{s}'$  z układu prawdziwego, wymaga trzech obrotów:

- wokół osi  $x$  o kąt  $\varepsilon_0$ , przejście do środ. układu ekliptycznego daty JD,
- wokół osi  $z$  układu ekliptycznego o kąt  $(-\Delta\psi)$ , jesteśmy w prawdziwym układzie ekliptycznym daty JD,
- wokół osi  $x$  prawdziwego układu ekliptycznego o kąt  $(-\varepsilon)$ , co daje prawdziwe współrzędne równikowe wektora  $\mathbf{s}'$  na datę JD.

Przemiany składowych wektora  $\mathbf{s}$  w składowe  $\mathbf{s}'$  można dokonać za pomocą

$$\mathbf{s}' = \mathbf{N}\mathbf{s} \quad (51)$$

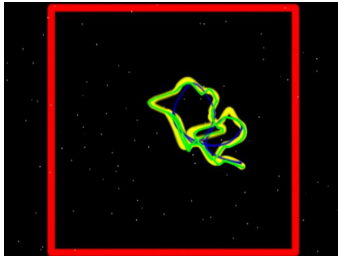
gdzie  $\mathbf{N}$  jest macierzą nutacji

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}(-\varepsilon)\mathbf{r}(-\Delta\psi)\mathbf{p}(\varepsilon_0) \quad (52)$$

Literatura

Seidelmann K., P. editor (1992). *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, Mill Valley, California.





Rysunek: Nutacyjny ruch bieguna: rzeczywistego (linia żółta), wg starej (linia niebieska) i nowej (linia zielona) teorii nutacji.

[<http://www.astronet.ru/db/msg/1195760>]

Początek wykładu