Astronomia sferyczna
Wykład 5: WSPÓŁRZĘDNE GEOCENTRYCZNE
Przejście topo- geocentrum i odwrotnie

Tadeusz Jan Jopek

Instytut Obserwatorium Astronomiczne, UAM

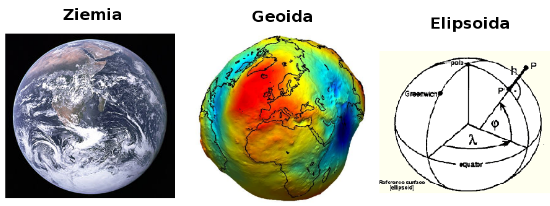
Semestr II

(Uaktualniono 2015.04.03)

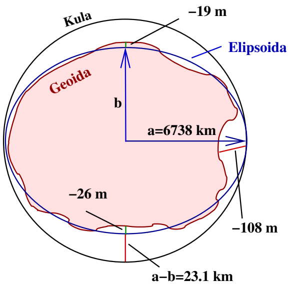
Część I

Położenie obserwatora na powierzchni Ziemi

Przybliżenia kształtu Ziemi

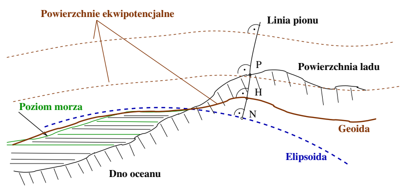


Kula, elipsoida, geoida



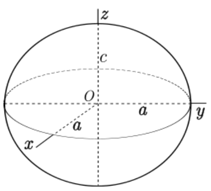
Rzeczywisty kształt bryły ziemskiej jest bardzo skomplikowany i nie daje się opisać prostą zależnością funkcyjną.

Schematyczny przebieg geoidy



Kształt Ziemi określa się w oparciu o średni poziom oceanu będącego w grawitacyjnej równowadze i pokrywającego się z powierzchnią ekwipotencjalną obserwowanej siły ciążenia. W potencjale, poza grawitacyjnymi, uwzględnia się wyrazy reprezentujące siły odśrodkowe będące efektem ziemskiej rotacji wokół osi. Powierzchnię ekwipotencjalną pokrywającą powierzchnię oceanu i rozciągniętą pod masami lądowymi nazywamy geoidą. Na geoidzie kierunek lokalnej siły ciążenia jest wszędzie normalny do jej powierzchni.

Ziemska elipsoida odniesienia



Geoida posiada liczne, w porównaniu do jej rozmiarów niewielkie nieregularności i dlatego można ją stosunkowo dokładnie przybliżyć elipsoidą obrotową o osi obrotu pokrywającej się z osią rotacji Ziemi.
Parametry elipsoidy: równikowy promień a oraz spłaszczenie biegunowe f, określają tzw. standardowy sferoid wykorzystywany do celów astronomicznych i geodezyjnych.
Południkowy przekrój elipsoidy ma równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-f)^2} = 1 \qquad (1)$$

Decyzją Międzynarodowej Unii Astronomicznej (MUA) z 1976 roku, jako standardowy przyjęto sferoid o parametrach:

$$a = 6378.140 \quad [\mathrm{km}], \qquad f = 0.00335281 = 1/298.257$$

a — promień równikowy (półoś wielka), c — półoś mała, f — spłaszczenie ziemskiej elipsoidy związane są równaniem $c = a(1-f)$.

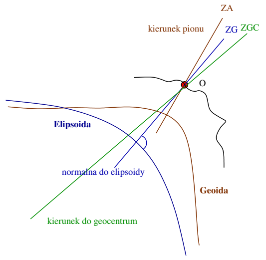
Elipsoidy odniesienia

Tablica: Historia. Elipsoidy odniesienia: *a* półoś wielka, *f* spłaszczenie

Elipsoida	a [m]	1/f
Airy (1830)	6 377 563	299.33
Everest (1830)	6 377 276.3	300.80
Bessel (1841)	6 377 397.2	299.15
Clarke (1866)	6 378 206.4	294.98
Clarke (1880)	6 378 249.2	293.47
Hayford (1924)	6 378 388	297
Krasovsky (1940)	6 378 245	298.3
IAU (1968)	6 378 160	298.25
WGS 72 (1972)	6 378 135	298.26
IAU (1976)	6 378 140	298.257
GRS 80 (1980)	6 378 137	298.26
WGS 84 (1984)	6 378 137	298.25722
IERS (1989)	6 378 136	298.257

Więcej informacji - knyknij TUTAJ.

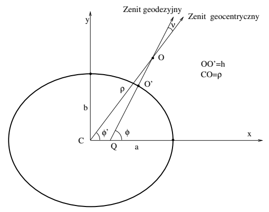
Szerokość astronomiczna, geodezyjna i geocentryczna



Wyróżniamy trzy definicje zenitu miejsca obserwacji *O*. Kierunek pionu definiuje zenit astronomiczny *ZA*. Kierunek ku środkowi masy Ziemi definiuje zenit geocentryczny *ZGC*. Przecięcie sfery półprostą normalną do elipsoidy odniesienia definiuje zenit geodezyjny *ZG*. Kierunki na zenit geodezyjny *ZG* i zenit geocentryczny *ZGC* leżą w płaszczyźnie tego samego południka. Zenit astronomiczny *ZA* nie musi leżeć w tej płaszczyźnie.

W oparciu o każdy z tych kierunków definiujemy trzy różne szerokości obserwatora *O* (szerokość to kąt jaki kierunek na zenit tworzy z płaszczyzną równika ziemskiego): szerokość geodezyjną, szerokość geocentryczną i szerokość astronomiczną.

Związki pomiędzy współrzędnymi geodezyjnymi i geocentrycznymi



Dla obserwatora *O* dane są współrzędne geocentryczne ρ, ϕ', λ. Odpowiadają im współrzędne geodezyjne ϕ, λ, h. Długości *lambda* sa identyczne w obu zestawach współrzędnych.
Współrzędne geodezyjne ρ, ϕ i h wiążą się z współrzędnymi ρ, ϕ' geocentrycznymi za pomocą:

$$\begin{aligned} \rho\cos\phi' &= a\cos\phi\cdot(C+h/a) \\ \rho\sin\phi' &= a\sin\phi\cdot(S+h/a) \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie

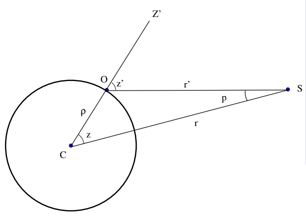
$$C = [\cos^2\phi + (1-f)^2\sin^2\phi]^{-1/2} \qquad S = (1-f)^2 C$$

ρ — odległość geocentryczna obserwatora, h — jego wysokość nad ziemską elipsoidą, a, f — półoś wielka, spłaszczenie elipsoidy.

Część II

Paralaksa geocentryczna

Paralaksa geocentryczna (dobowa)



Przemieszczenie z *C* do *O* pociąga powiększenie obserwowanej odległości zenitalnej z' obiektu o kąt p bez wpływu na jego azymut.
Paralaksa geocentryczna p to kąt *OSC* rozpięty na promieniu łączącym środek masy Ziemi i obserwatora.

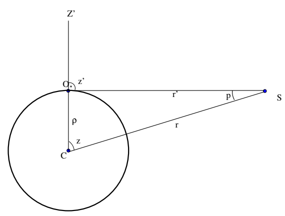
$$z' = z + p \tag{3}$$

Z trójkąta *OCS* z wzoru sinusów dostaniemy

$$\sin p = \frac{\rho}{r}\sin z' = \frac{\rho}{r'}\sin z \tag{4}$$

Paralaksa zależy od odległości zenitalnej obiektu, zatem potrzebna jest standaryzacja.

Paralaksa horyzontalna



Definicja

Paralaksa horyzontalna (kąt P), stanowi standaryzację paralaksy geocentrycznej.
Odpowiada paralaksie obiektu obserwowanego na horyzoncie obserwatora *O* znajdującego się w odległości $\rho = a$ od środka Ziemi.

$$z' = z + P = 90^\circ \tag{5}$$

Dla $z' = 90^\circ$, wzór (4) przechodzi w postać (a — promień równikowy ziemskiej elipsoidy)

$$\sin P = \frac{a}{r} \tag{6}$$

Dla $a = 1$ sinus paralaksy horyzontalnej jest równy odwrotności odległości obiektu od geocentrum *C*.

Paralaksa horyzontalna - zastosowanie

Wzór (6) możemy wykorzystać do modyfikacji wzoru (4):

$$\sin p = \frac{\rho}{a}\sin P \sin z' \tag{7}$$

Paralaksy horyzontalne P stosowane są zamiast geocentrycznej odległości r obiektu. Jednak pamiętajmy, że w Układzie Słonecznym wartości paralaks horyzontalnych planet ..., ze względu na ich ruch orbitalny nie są stałe. Np. dla Księżyca paralaksa horyzontalna oscyluje pomiędzy $54' - 61'$.
Dlatego Międzynarodowa Unia Astronomiczna rekomenduje średnie wartości paralaks i dla Księżyca zaleca wartość P_0 podaną w 1983 roku przez Murray'a

$$\sin P_0 = 3422.485 \cdot \sin 1''$$

co jest równoważne

$$P_0 = 57'02.''6050 \tag{8}$$

Paralaksy geocentryczne planet są mniejsze. Dla Saturna wynosi ona około $1''$, dla Wenus waha się w granicach $5'' - 34''$. Dla obiektu znajdującego się na odległości 1 *AU*, paralaksa nosi nazwę paralaksy słonecznej. Jest ona bardzo bliska średniej paralaksy prawdziwego Słońca.

Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego?

Trzecie prawo Keplera

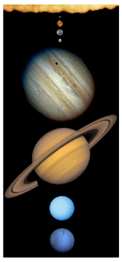
$$\frac{k^2(M_S + m_p)}{4\pi^2} = T_p^2/a_p^3 \approx const \tag{9}$$

gdzie: k^2 stała grawitacji, a_p półoś orbity planety, T_p orbitalny okres obiegu planety, M_p masa planety, M_S masa Słońca.
Pozycyjne obserwacje w długich interwałach czasu pozwalają dokładnie wyznaczyć okres orbitalny. Wówczas z prawa Keplera zastosowanego do dwóch planet daje się obliczyć względne rozmiary orbit planet.

Aby wyznaczyć rozmiary absolutne (np. w metrach) trzeba znać wartość stałej k^2, ta zaś w czasach Keplera nie była znana.

A zatem, można skonstruować model Układu Słonecznego w pewnej skali, jednak by był to model w metrach konieczny jest pomiar odległości (paralaksy) choćby do jednej planety.

Klasyfikacja planet

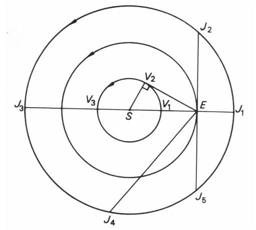


Określenia

Planety dolne:
- Merkury,
- Wenus.

Planety górne:
- Mars,
- Jowisz,
- Saturn,
- Uran,
- Neptun.

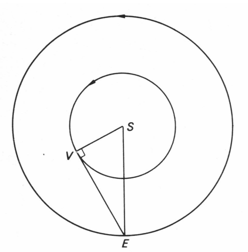
Konfiguracje planet



Określenia

- Opozycja
  S-E-J_1 — Jowisz w opozycji ze Słońcem, E— Ziemia.
- Kwadratura
  S-E-J_2 — kwadratura zachodnia,
  S-E-J_5 — kwadratura wschodnia.
- Koniunkcja
  S-E-V_1 — koniunkcja dolna, Venus
  S-E-V_3 — koniunkcja górna,
  S-E-J_3 — koniunkcja górna.
- Elongacja
  S-E-V_2 — elongacja maksymalna,
  S-E-J_4 — elongacja Jowisza.

Maksymalna elongacja a względne rozmiary orbit planet



Dla Wenus w momencie maksymalnej elongacji mamy:

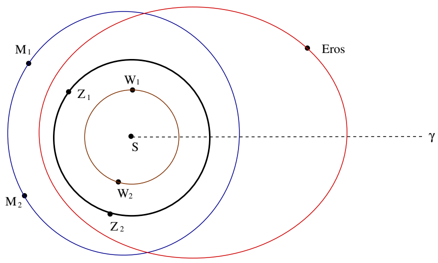
$$\frac{SV}{SE} = sin(VES)$$

Jeśli odległość Ziemi od Słońca $SE = 1$, to odległość Wenus od Słońca wynosi:

$$SV = sin(VES)$$

SV — w jednostkach promienia orbity Ziemi.

Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego w metrach?



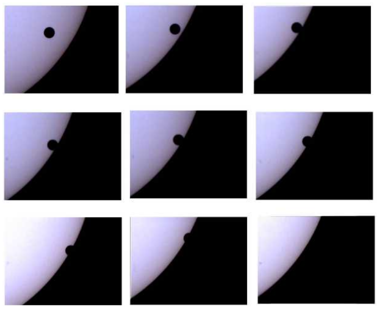
W oparciu o koniunkcje dolne Wenus?

Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego w metrach?

Rysunek: Koniunkcja dolna Wenus, styczeń 2014.

W oparciu o koniunkcje dolne Wenus?

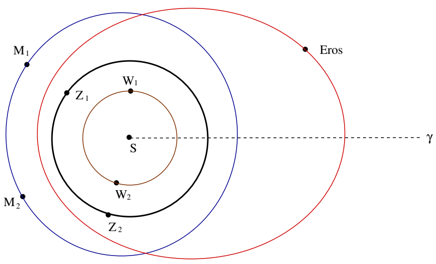
Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego w metrach?



W oparciu o obserwacje tranzytu Wenus przed tarczą Słońca?

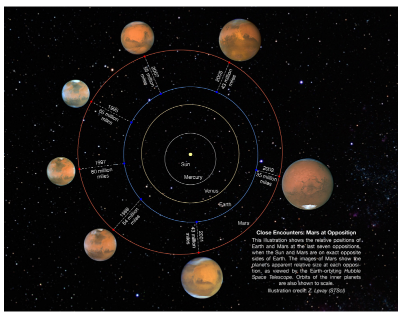
(©gjscheffer@solcon.nl)

Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego w metrach?



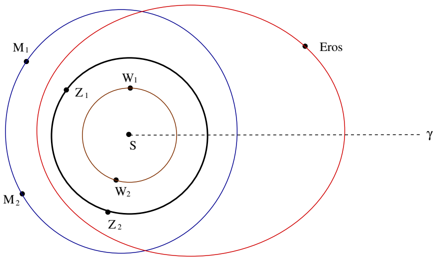
W oparciu o obserwacje Marsa w momencie jego opozycji ze Słońcem?

Opozycje Marsa ze Słońcem



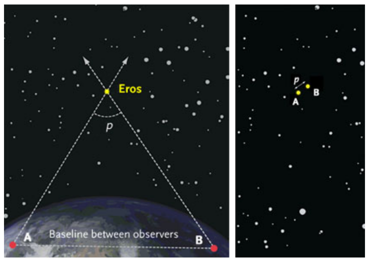
Rozmiary kątowe Marsa wyraźnie zmieniają się w momentach jego opozycji. Jednak nie wystarcza to dokładnego wyznaczenia jego paralaksy.

Jak wyznaczyć rozmiary Układu Słonecznego w metrach?



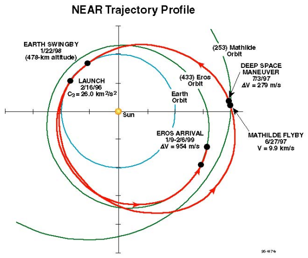
Pod koniec XIX wieku odkryto planetkę Eros. Orbita Erosa zbliża się do orbity Ziemi na odległość 0.16 AU.

Kampania obserwacyjna Erosa

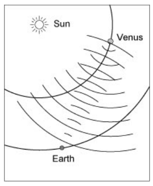


Dzięki obserwacjom Erosa dokonano rewizji rozmiarów Układu Planetarnego.

Misja Near do planetki 433 Eros



Paralaksa słoneczna



W roku 1959, w warunkach koniunkcji Wenus ze Słońcem zmierzono odległości do planety techniką radarową.
W rezultacie wyznaczono paralaksę słoneczną:

$$P_0 = 8''.794148$$

która pozwoliła na udokładnienie wartości jednostki astronomicznej:

$$1[JA] = 1.49597870\,10^{11}[m]$$

Jednostka astronomiczna

Obecnie jednostki astronomicznej nie definiuje się w oparciu o średnią wartość półosi orbity Ziemi. Ta zmienia się w wyniku perturbacji planetarnych.

Definicja oparta jest o stałą grawitacyjną k tzw. stała Gaussa,

$$k = 0.017202009895 \quad [JA^{3/2} doba^{-1} M_S^{-1/2}]$$

która przetrwała zmiany systemu stałych i nie wydaje się by miało być inaczej w przyszłości.

Dla podanej wyżej wartości stałej k jednostkę astronomiczną definiuje się jako długość wielkiej półosi a_p w równaniu:

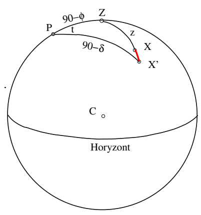
$$\frac{k^2}{4\pi^2} = T_p^2 / a_p^3 \approx const$$

której odpowiada okres obiegu T_p jednego roku wyrażony w dobach.

Część III

Wpływ paralaksy i aberracji

Wpływ paralaksy na współrzęne równikowe α, δ.



W formułach na małe przesunięcie, punktem o współrzędnych α_0, δ_0 będzie zenit, czyli $\alpha_0 = CG_M$ a $\delta_0 = \phi'$, gdzie CG_M czas gwiazdowy, ϕ' geocentryczna szerokość obserwatora.
Zatem $\alpha - \alpha_0 = -\mathcal{H} = -t$, oraz $k = \frac{\rho}{r}$, gdzie ρ, r geocentryczna odległość obserwatora i obiektu, odpowiednio.

Poprawki paralaktyczne w α, δ

Podstawiając prawe strony wyrażeń na k i $(\alpha - \alpha_0)$ do formuł na małe przesunięcie uzyskamy:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha = -\frac{\rho}{r}\cos\phi' \sin t \sec\delta$$
$$d\delta = \delta' - \delta = \frac{\rho}{r}(\cos\phi' \cos t \sin\delta - \sin\phi' \cos\delta) \quad (10)$$

Formuły przybliżone i formuły dokładne

Formuły (10) są przybliżone (pierwszy rząd ze względu na (ρ/r)), dlatego nie należy ich używać w przypadku Księżyca czy też sztucznych satelitów Ziemi. Nadają się dla pozostałych ciał niebieskich o ile ciała te nie znajdują się zbyt blisko Ziemi.

Dla obiektów bardzo dalekich należących do Dysku Kuipera, paralaksy geocentryczne są bardzo małe i w formułach (10) nie ma potrzeby rozróżnienia pomiędzy szerokościami geodezyjną i geocentryczną, a jako ρ można do wzorów podstawić wartość a równikowego promienia Ziemi.

Formuły przybliżone należy stosować z rozwagą, a w sytuacjach wątpliwych konieczne jest podejście dokłade.

Mianowicie, niech $\mathbf{r}$ i $\mathbf{R}$ będą geocentrycznymi wektorami położenia obiektu S i obserwatora O. Wówczas wektor $\mathbf{r}'$ od obserwatora do obiektu dany jest jako różnica

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} \tag{11}$$

Paralaksa Księżyca (1)

Wektor $\mathbf{R}$ położenia obserwatora na powierzchni Ziemi jest to wektor o długości ρ skierowany na geocentryczny zenit obserwatora. We współrzędnych równikowych ma on składowe

$$\mathbf{R} = \rho(\cos\phi' \cos T, \cos\phi' \sin T, \sin\phi') \tag{12}$$

gdzie T jest miejscowym czasem gwiazdowym w momencie obserwacji.

Dla Księżyca, na moment obserwacji z rocznika astronomicznego bierzemy jego współrzędne równikowe geocentryczne (α, δ) oraz paralaksę horyzontalną P. Wówczas korzystając z równania (6) możemy obliczyć geocentryczną odległość Księżyca

$$r = a \csc P$$

gdzie a jest średnim promieniem równikowym Ziemi.

Gocentryczny wektor położenia Księżyca ma zatem składowe

$$\mathbf{r} = a \csc P(\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta) \tag{13}$$

Paralaksa Księżyca (2)

Niech (x', y', z') będą składowymi wektora $\mathbf{r}'$, opisującego obserwowane położenie Księżyca. Odpowiadające im współrzędne sferyczne oznaczymy przez (α', δ'). Równanie (11) w wersji skalarnej będzie wówczas dane jako układ

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\delta'\cos\alpha' = a\csc P\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\phi'\cos T \\ y' &= r'\cos\delta'\sin\alpha' = a\csc P\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\phi'\sin T \\ z' &= r'\sin\delta' = a\csc P\sin\delta - \rho\sin\phi' \end{aligned} \tag{14}$$

Dysponując składowymi (x', y', z') łatwo obliczymy (α', δ')

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arctan(y'/x') \\ \delta' &= \arctan(z'/\sqrt{(x'^2 + y'^2)}) \end{aligned} \tag{15}$$

Równanie (15) wymaga pewnej ostrożności podczas normowania rektascensji do odpowiedniej ćwiartki.

Paralaksa sztucznego satelity Ziemi (1)

Przykład.

W stacji o szerokości geodezyjnej $39°42'48''$ dokonano obserwacji sztucznego satelity Ziemi zarówno radiowo jak i optycznie. Wysokość stacji wynosi 456 metrów nad poziomem morza.

Z obserwacji otrzymano następujące równikowe współrzędne satelity:

$$\begin{aligned} r' &= 1735.87\ km \\ \alpha' &= 7^h12^m19^s \\ \delta' &= -21°42'21'' \\ T &= 9^h17^m34^s \end{aligned}$$

gdzie T — miejscowy czas gwiazdowy momentu obserwacji.

Oblicz geocentryczne miejsce i odległość satelity.

Paralaksa sztucznego satelity Ziemi (2)

Rozwiązanie wymaga kilku kroków.

1. Należy obliczyć składowe wektora $\mathbf{R}$ położenia obserwatora na moment obserwacji. W tym celu przyjmujemy $a = 6378.14$ km, $f = 3.35281 \cdot 10^{-3}$ oraz zamieniamy wartości kątowe $\phi = 39.^\circ7133$, $T = 139.^\circ3917$.

Kolejno obliczamy:

$$\begin{aligned} h/a &= 7.15 \cdot 10^{-5} \\ C(\phi) &= 1.0013693 \\ S(f) &= 0.9946658 \\ \rho\cos\phi' &= 4913.459\ [\mathrm{km}] \\ \rho\sin\phi' &= 4053.845\ [\mathrm{km}] \end{aligned}$$

W oparciu o te wielkości za pomocą równań (2) obliczamy składowe wektora położenia obserwatora na moment obserwacji T.

$$\mathbf{R} = (-3730.183, 3198.095, 4053.845)$$

Paralaksa sztucznego satelity Ziemi (3)

2. Wykorzystując obserwacje satelity obliczamy składowe wektora $\mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} r' &= 1735.87\ [\mathrm{km}] \\ \alpha' &= 108.0792 \\ \delta' &= -21.7058 \\ \mathbf{r}' &= (-500.498, 1533.162, -641.997) \end{aligned}$$

3. Wobec (11) geocentryczny wektor $\mathbf{r}$ ma składowe

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} = (-4230.681, 4731.257, 3411.849)\ \ [\mathrm{km}]$$

4. Po przejściu do współrzędnych sferycznych, na moment T mamy geocentryczne współrzędne sferyczne satelity (r, α, δ):

$$\begin{aligned} r &= 7205.843 \\ \alpha &= 8^h47^m13^s \\ \delta &= 28°15'38'' \end{aligned}$$

Paralaksa sztucznego satelity Ziemi (4)

Porównajmy wartości współrzędnych położenia tego satelity:

Miejsce topocentryczne

$$\begin{aligned} r' &= 1735.87\ km \\ \alpha' &= 7^h12^m19^s \\ \delta' &= -21°42'21'' \end{aligned}$$

Miejsce geocentryczne

$$\begin{aligned} r &= 7205.843\ km \\ \alpha &= 8^h47^m13^s \\ \delta &= 28°15'38'' \end{aligned}$$

Aberacja dobowa we współrzędnych równikowych

Założenia, formuły

- ρ, ϕ', λ — położenie obserwatora na powierzchni Ziemi, ω kątowa szybkość wirowania Ziemi, stąd liniowa szybkość obserwatora wynosi $V = \rho\omega\cos\phi'$,
- wektor prędkości obserwatora $\mathbf{n}$ skierowany jest na punkt o współrzędnych α_0, δ_0, czyli

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= CG_M + 6^h \\ \delta_0 &= 0 \end{aligned}$$

- z powodu aberracji dobowej, położenie gwiazdy określone za pomocą α, δ lub $\mathbf{s}$, ulegnie zmianie o przyrosty:

$$d\mathbf{s} = -(V/c)\,\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n})$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha' - \alpha = (\rho\omega\cos\phi'/c)\sec\delta\cos t \\ d\delta &= \delta' - \delta = (\rho\omega\cos\phi'/c)\sin\delta\sin t \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie podstawiono $(\alpha_0 - \alpha) = -t$, natomiast c jest szybkością światła.

Aberacja dobowa, uwagi

Poprawki (16) na aberrację dobową nie zależą od odległości obiektu. Aby otrzymać współrzędne geocentryczne trzeba jeszcze dokonać transformacji uwzględniającej wpływ paralaksy geocentrycznej.
Gdy paralaksa i aberracja są małe porządek uwzględnienia poprawek nie jest istotny. Dla dużej paralaksy, *a natura rei*, trzeba aberrację usuwać przed zastosowaniem ścisłych formuł na paralaksę geocentryczną.

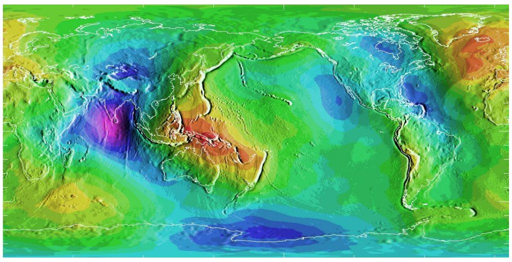
Wpływy relatywistyczne mogą być pominięte ze względu na niewielki stosunek V/c dla aberacji dobowej. Pominięcie relatywistycznego efektu odchylenia światła $\delta\psi$ w polu grawitacyjnym Ziemi wymaga dalszego uzasadnienia. Odchylenie to nie przekracza $2m/a$ radianów, gdzie m jest połową Schwarzschildowskiego promienia Ziemi. Ponieważ

$$m = GM_{\oplus}/c^2 = 4.4 \ \ [\mathrm{mm}] \tag{17}$$

gdzie G — stała grawitacji, $M_{\oplus}$ — masa Ziemi, a — promień Ziemi. Stąd

$$\delta\psi = 2m/a < 0.''0003 \tag{18}$$

co usprawiedliwia pominięcie wpływu grawitacji na kierunak propagacji światła w pobliżu Ziemi.



Rysunek: Kształt goidy WGS-84/EGM96 względem elipsoidy odniesienia. Klor niebieski, purpurowy oznacza depresje (do -107m), kolor czerwony wzniesienia (do 85 m) nad elopsoidą.

[http://www.unavco.org/edu_outreach/tutorial/geoidcorr.html]

Poczatek wykładu