

Wykład 1:
SFERA NIEBIESKA
 Elementy geometrii i trygonometrii sferycznej

Tadeusz Jan Jopek

Institut Obserwatorium Astronomiczne, Wydział Fizyki UAM

Semestr II

(Aktualizowano 5 marca 2016)

Część I

Sfera niebieska: geometria, współrzędne punktów na sferze.

1 Wstęp

- Koncepcja sfery niebieskiej: źródło
- Koncepcja sfery niebieskiej: zastosowanie
- Definicja sfery

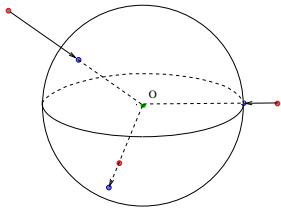
2 Elementy geometryczne na sferze

- Koło wielkie, koło małe, bieguny kół
- Dwukąt sferyczny, kąt sferyczny, trójkąt sferyczny
- Długości łuków na sferze

3 Położenia ciał niebieskich na sferze

- Współrzędne prostokątne ciał niebieskich
- Współrzędne sferyczne.
- Przemiany współrzędnych sferycznych i prostokątnych.
- Przykład: układ współrzędnych równikowych.

Koncepcja sfery niebieskiej (2)
 Zastosowanie: wyznaczenie położenia ciał niebieskich

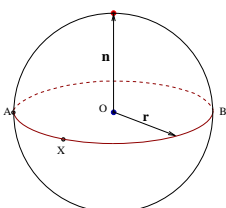


Rysunek: Rzutowanie gwiazd na sferę niebieską.

W celu wyznaczenia położenia ciała niebieskiego (kierunku propagacji promieniowania E-H) wygodnie jest przyjąć, że:

- kierunek do rzeczywistego obiektu jest identyczny z kierunkiem do jego rzutu położonego na sferze niebieskiej,
- obserwator znajduje się w środku sfery niebieskiej,
- promień sfery wynosi 1 [czegoś] w dowolnych jednostkach.

Koło wielkie



Rysunek: Koło wielkie AX.

Definicja

Ślad przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez środek sfery jest **kołem wielkim**.

Wektory r punktów koła wielkiego spełniają równanie:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{r} = 0 \quad (1)$$

gdzie: wektor jednostkowy \mathbf{n} wskazuje jeden z biegunów koła wielkiego, natomiast wektor r przebiega punkty koła wielkiego.

Koncepcja sfery niebieskiej (1)

Źródło koncepcji

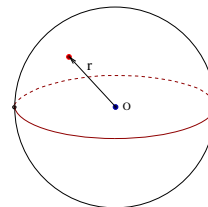
Do koncepcji niebieskiej sfery doprowadzają nas następujące spostrzeżenia:



- wygląd rozgwieżdżonego nocnego nieba,
- nie potrafimy rozróżnić, które obiekty są nas bliżej, a które dalej,
- ruch dobowy gwiazd przebiega tak, jak gdyby były one na sztywno przymocowane do niewidocznej sfery.

► Powiększenie

Definicja sfery niebieskiej



Rysunek: Jednostkowa sfera o środku w O.

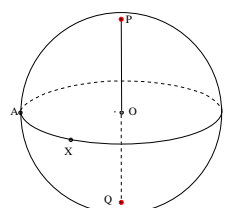
Definicja

Sfera jest to powierzchnia, której punkty są równoodległe od punktu wspólnego zwanego **środkiem sfery**. Wektory punktów położonych na powierzchni sfery spełniają równanie:

$$r^T r = 1$$

gdzie: r oznacza wektor jednostkowy o początku w środku sfery.

Bieguny koła wielkiego



Rysunek: Koło wielkie i jego bieguny PQ.

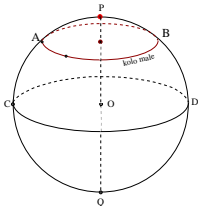
Definicja

Końce średnicy prostopadłej do koła wielkiego nazywane są **biegunami koła wielkiego**. Np. biegunami koła wielkiego AX są punkty P i Q.

Przez bieguny P, Q można wykreślić nieskończenie wiele kół wielkich.

Dwa punkty sfery, które nie są punktami biegunowymi, np. A i X, wyznaczają jedno koło wielkie bowiem łącznie ze środkiem sfery (punktem O) jednoznacznie określają płaszczyznę, której przecięcie ze sferą jest kołem wielkim.

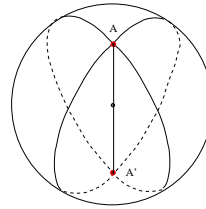
Koło małe



Rysunek: Koło małe AB i jego bieguny PQ.

Definicja
 Przecięcie sfery płaszczyzną nie przechodzącą przez środek sfery jest okręgiem, tradycyjnie zwanym **kołem małym**.
 Jego bieguny P i Q są punktami skrajnymi średnicy sfery prostopadłej do płaszczyzny koła małego.
 Promień koła małego jest zawsze mniejszy od promienia sfery.

Dwukąt sferyczny

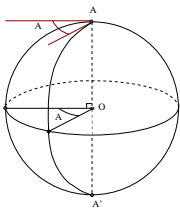


Rysunek: Dwukąty sferyczne.

Definicja
 Przecięcie sfery dwoma kołami wielkimi wyznacza cztery obszary (powierzchnie) zwane **dwukątami sferycznymi**.
 Dwukąt sferyczny określony jest **kątem sferycznym**, np. kątem A .
 Pole powierzchni dwukąta wynosi

$$S = 2r^2 A$$
 gdzie A w radianach,
 r – promień sfery.

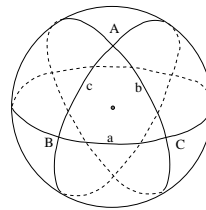
Kąt sferyczny



Rysunek: Kąt sferyczny A.

Definicja
 Kąt liniowy pomiędzy płaszczyznami kół wielkich jest **kątem sferycznym**.
 Jest on identyczny z kątem pomiędzy stycznymi wystawionymi w punkcie wzajemnego przecięcia się kół wielkich.

Trójkąt sferyczny

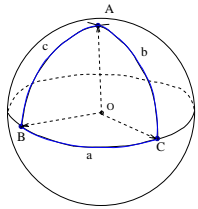


Rysunek: Trójkąty sferyczne.

Definicja
 Trzy koła wielkie tworzą na sferze osiem obszarów zwanych **trójkątami sferycznymi**.
 Gdy dostępne są elementy jednego z tych trójkątów (trzy boki (łuki) a, b, c oraz kąty wewnętrzne A, B, C), można łatwo wyznaczyć elementy wszystkich pozostałych trójkątów.

Dla ciekawych
 A na ile obszarów podzieli sferę n kół wielkich?

Trójkąt sferyczny paralaktyczny: własności (1)



Rysunek: Trójkąt sferyczny ABC, paralaktyczny (eulerowski). Wszystkie boki a, b, c trójkąta paralaktycznego są mniejsze od π .

Dla dowolnego z boków a, b, c i kątów sferycznych A, B, C mamy:

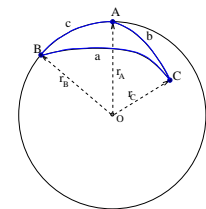
$$a < b + c$$

$$a > |b - c|$$

$$\pi < A + B + C < 3\pi$$
 Różnica

$$(A + B + C) - \pi = \epsilon$$
 zwana jest **nadmiarem sferycznym**.

Trójkąt sferyczny: własności (2)



Rysunek: Trójkąt paralaktyczny ABC.

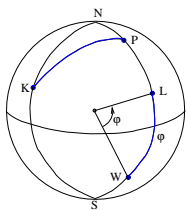
Definicja
 Różnica

$$(A + B + C) - \pi = \epsilon$$
 jest **nadmiarem sferycznym**.
 Pole powierzchni trójkąta sferycznego wynosi

$$S = r^2 \epsilon$$
 gdzie r jest promieniem sfery, a kąt ϵ – nadmiar sferyczny podano w radianach.

Trójkąt płaski posiada tylko jeden kąt prosty, trójkąt sferyczny niekoniecznie, może mieć ich dwa a nawet trzy.

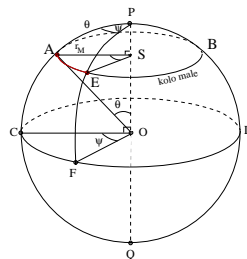
Długość łuku koła wielkiego



Rysunek: Ortodromy LW, KP – linie geodezyjne na sferze.

Ortodroma
 Na punktach L, W rozpięte są dwa łuki koła wielkiego, mniejszy z nich to **linia geodezyjna (ortodroma)**. Jest to najkrótsza krzywa łącząca na sferze punkty L i W .
 Linie geodezyjne pełnią na sferze rolę taką jak linie proste w geometrii euklidesowej.
 Ponieważ promień sfery niebieskiej $r = 1$, to długość łuku LW koła wielkiego równa jest kątowi środkowemu ϕ (w radianach) jaki ten łuk rozpina względem środka sfery.

Długość łuku koła małego



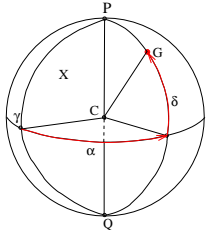
Izogona
 Dana jest sfera jednostkowa ($r=1$). Na punktach A, E rozpięte są dwa łuki koła małego. Krótszy z nich, tzw. **izogona** ma długość AE daną formułą:

$$AS = AO \cdot \sin AOS$$

$$r_M = \sin \theta$$

$$AE = r_M \cdot ASE = \psi \sin \theta \quad (2)$$

Przykład zastosowania definicji współrzędnych sferycznych



Układ współrzędnych równikowych

- biegunem układu jest północny biegun świata P, współrzędną polarną jest łuk $PG = 90^\circ - \delta$ gdzie δ jest delkinacją obiektu G,
- plaszczyną odniesienia współrzędnej azymutalnej α jest półkole P Γ , gdzie Γ jest punktem równonocy wiosennej.
- rektascensja α wzrasta zgodnie z kierunkiem rocznego ruchu Słońca,
- wartości współrzędnych α, δ należą do dziedziny:

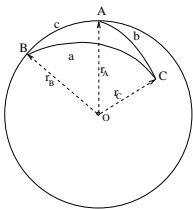
$$0^\circ \leq \alpha \leq 24^h$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

4 Elementy trygonometrii sferycznej

- Wzór cosinusów
- Wzór sinusów
- Wzór pięcioelementowy
- Wzór cotangesowy

Formuły trygonometrii sferycznej (2)



Ustalenia cd.

Zgodnie z równaniami

$$x = \sin \theta \cos \psi$$

$$y = \sin \theta \sin \psi \quad (12)$$

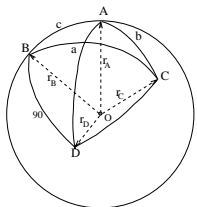
$$z = \cos \theta$$

składowe wektorów położen punktów B i C, wynoszą

$$\mathbf{r}_B = (\sin c, 0, \cos c)$$

$$\mathbf{r}_C = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b) \quad (13)$$

Wzór sinusów (1)



Wyprowadzenie

Badamy iloczyn wektorowy

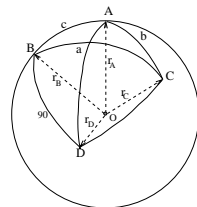
$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \sin a \mathbf{r}_D \quad (15)$$

gdzie \mathbf{r}_D jest wektorem jednostkowym.

Po podstawieniu składowych i wymnożeniu, lewa strona uzyskuje postać

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = (\sin b \cos c \sin A, \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, -\sin b \sin c \sin A) \quad (16)$$

Wzór sinusów (2)



Wyprowadzenie: badanie iloczynu $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$

Sferyczne współrzędne punktu D wynoszą ($\psi = \theta = \psi = AD$).

Zatem, korzystając z (12) prawą stronę równania

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \sin a \mathbf{r}_D$$

przepiszemy jako

$$\sin a \mathbf{r}_D = \sin a (\sin AD \cos BAD, \sin AD \sin BAD, \cos AD) \quad (17)$$

Cosinusy i sinusy kątów AD, BAD zastąpimy wyrażeniami zawierającymi jedynie elementy trójkąta sferycznego ABC

Formuły trygonometrii sferycznej (1)

Część II

Trygonometria trójkąta sferycznego

Ustalenia

Na wektorach jednostkowych $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ rozpinamy trójkąt ABC.

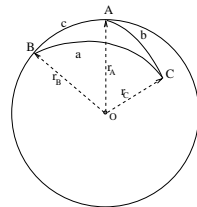
Obieramy układ współrzędnych sferycznych:

- biegun układu ustalamy w punkcie A,
- plaszczynę łuku AB obieramy jako odniesienie miary współrzędnej azymutalnej ψ

Zatem:

- położenie punktu B dane jest przez ($\theta = c, \psi = 0$),
- położenie punktu C przez ($\theta = b, \psi = A$).

Wzór cosinusów



Wyprowadzenie

Kąt pomiędzy $\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ jest równy długości boku BC, a wobec $|\mathbf{r}_B| = |\mathbf{r}_C| = 1$ iloczyn skalarny tych wektorów wynosi

$$\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C = \cos a$$

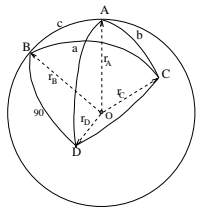
Podstawiając składowe wektorów \mathbf{r}_B i \mathbf{r}_C , mamy

$$(\sin c, 0, \cos c) \cdot (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$$

i w rezultacie dostajemy wzór **cosinusów**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (14)$$

Jest to jedna z podstawowych formuł trygonometrii sferycznej.



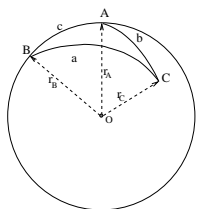
Wyprowadzenie cd

Punkt D jest biegunem koła wielkiego BC , wobec czego, łuk $BD = 90^\circ$ i biegnie prostopadle do koła BC . Stąd, $ABD = 90^\circ + B$, a w trójkącie sferycznym BAD , ze wzoru cosinusów

$$\begin{aligned} \cos AD &= \\ \cos 90^\circ \cos c &= \sin 90^\circ \sin c \cos(90^\circ + B) \\ \cos AD &= -\sin c \sin B \end{aligned}$$

Podstawiając $-\sin c \sin B$ do składowej z-towej w równaniu (17), porównując ją ze składową z-tową z równania (16) otrzymamy wzór **sinusów**

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} \quad (18)$$



Wyprowadzenie

Wzór cotangensowy (czteroczęściowy) uzyskamy ze wzorów cosinusów i sinusów. Korzystamy ze wzoru cosinusów boków b i c trójkąta ABC

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}$$

$\cos c$ w pierwszym równaniu eliminujemy za pomocą prawej strony drugiego równania

$$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B$$

Kładąc za $\sin c$ odpowiednie wyrażenie ze wzoru sinusów dostaniemy ...

Część III

Pożyteczny aparat obliczeniowy

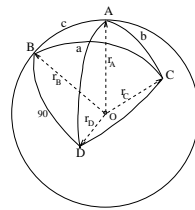
Wstęp

W astronomii sferycznej mamy do czynienia z niewielkimi zmianami kierunków do ciał niebieskich (tzw. małe przesunięcia). Przyczyny i wielkość przesunięć bywają różne, m.in. zależą od położenia obiektów. Ale same przesunięcia zawsze zachodzą po kołach wielkich łączących poszczególne obiekty ze wspólnym, ustalonym punktem sfery.

Do zjawisk wywołujących niewielkie zmiany współrzędnych ciał niebieskich należą m. in.:

- paralaksa roczna "przesuwa" obiekt wzdłuż koła wielkiego zawierającego wersory kierunku do Słońca i do obiektu,
- aberacja dobową przebiega po łuku koła wielkiego rozpiętego na wektorach położenia danego ciała i prędkości dobowej obserwatora,
- przesunięcia powodowane refrakcją atmosferyczną przebiega w kierunku zenitu obserwatora po wertykale, na którym znajduje się obiekt.

Wszystkie tego typu przesunięcia można traktować jako szczególne przypadki ogólniejszego małego przesunięcia opisanego poniżej.



Wyprowadzenie

W $\triangle BAD$, mocą wzoru sinusów dla boku AD i kąta wierzchołkowego ADB będzie:

$$\frac{\sin(90^\circ + B)}{\sin AD} = \frac{\sin BAD}{\sin 90^\circ}$$

$$\sin AD \sin BAD = \sin(90^\circ + B) = \cos B$$

Kładąc ten rezultat do y-kowej składowej równania (17), przyrównując ją ze składową y-kową równania (16) otrzymujemy ważny wzór zwany wzorem **pięcioelementowym**

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \quad (19)$$

Dalsze pięć wzorów typu (19) otrzymamy po odpowiednich permutacjach symboli w $\triangle ABC$.

Wyprowadzenie cd

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \\ &\sin a \left[\frac{\sin b \sin C}{\sin B} \right] \cos B \end{aligned}$$

Po podzieleniu obu stron przez $\sin b$, będzie

$$\cot b = \cos^2 a \cot b + \cos a \sin a \cos C + \sin a \sin C \cot B$$

$$\sin^2 a \cot b = \sin a(\cos a \cos C + \sin C \cot B)$$

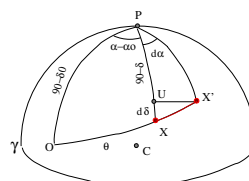
Dzieląc drugie równanie stronami przez $\sin a$, otrzymamy wzór **cotangensowy**

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \quad (20)$$

Komplet sześciu wzorów uzyskamy odpowiednio permutując symbole w $\triangle ABC$.

- 5 Małe przesunięcia
 - Podejście sferyczne: zmiany współrzędnych α, δ
 - Podejście wektorowe: zmiany kierunku wersora położenia \mathbf{s}
- 6 Wektorowe transformacje współrzędnych.
 - Macierze obrotów.
 - Kąty Eulera.
 - Macierze lustrzanych odbić.
 - Przemiana współrzędnych prostokątnych i sferycznych.
- 7 Dygresja
 - Małe kąty
- 8 Podsumowanie
 - Uwagi podsumowujące

Koncepcja małego przesunięcia: założenia



Założenia

Kierunek do gwiazdy $X(\alpha, \delta)$ uległ **małemu przesunięciu** do punktu X' , odbyło się to wzdłuż koła wielkiego łączącego X z punktem $O(\alpha_0, \delta_0)$.

Łuk $OX = \theta$ a łuk $XX' = d\theta$, $d\theta$ jest małym kątem.

Umawiamy się jeszcze, że wielkość przesunięcia $d\theta$ opisana jest za pomocą

$$XX' = d\theta = k \sin \theta \quad (21)$$

gdzie k jest stałą dodatnią lub ujemną niezależną od własności fizycznych obiektu.

Dla ustalonego k interesujemy się przesunięciami, których wielkość zależy jedynie od kątowej odległości obiektu od punktu O .

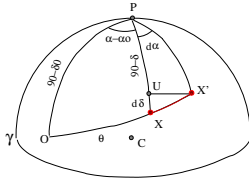
Formuły na przystoty $d\alpha, d\delta$

Wyprowadzenie (1)

Punkt X' ma współrzędne $(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$. Szukamy wyrażeni na przystoty $d\alpha, d\delta$ odpowiadające przesunięciu $d\theta$.

W tym celu, konstruujemy obiekt geometryczny o znanych własnościach (np. trójkąt), którego elementy będą miały związek z wielkościami: $d\alpha, d\delta, d\theta, \dots$

Przez X' poprowadźmy koło małe o biegunie w P , przecinające łuk PX w punkcie U . Powstał $\triangle UXX'$, poszukamy wyrażeni na niektóre jego elementy.



Formuły na przystoty $d\alpha, d\delta$

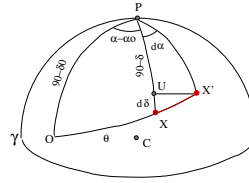
Wyprowadzenie (2)

Boki UX', UX wyrazimy za pomocą współrzędnych punktów X i X' :

- $\angle PX = \alpha, \angle PX' = \alpha + d\alpha \implies UPX' = d\alpha,$
- $PX' = PU = 90^\circ - (\delta + d\delta)$, stąd z równania (2), z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu:

$$UX' = d\alpha \sin(90^\circ - (\delta + d\delta)) = d\alpha \cos(\delta + d\delta) \approx d\alpha \cos \delta$$

- drugi bok $UX = d\delta$



Formuły na przystoty $d\alpha, d\delta$

Boki UX', UX wyrazimy za pomocą wielkości k, θ opisujących małe przesunięcie.

Wyprowadzenie (3)

W stosunku do promienia sfery, trójkąt $\triangle UXX'$ jest bardzo mały, stąd przyjmujemy go za płaski o kącie prostym w U . W takim przybliżeniu:

- jeśli $OX' = \chi$ to $UXX' = 180^\circ - \chi,$
- a z trygonometrii trójkąta płaskiego:

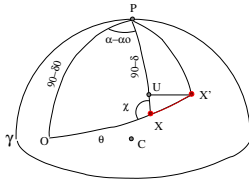
$$UX = XX' \cos(180^\circ - \chi) = -XX' \cos \chi$$

$$UX' = XX' \sin(180^\circ - \chi) = XX' \sin \chi$$

- przyrównując oba rezultaty na UX' i UX , kładąc $XX' = k \sin \theta$ dostajemy:

$$\cos \delta d\alpha = k \sin \theta \sin \chi$$

$$d\delta = -k \sin \theta \cos \chi \quad (22)$$



Formuły na przystoty $d\alpha, d\delta$

Wyprowadzenie (4)

W celu wycięcia w (22) kątów θ, χ , do $\triangle OPX$ stosujemy wzór sinusów i wzór pięcioelementowy

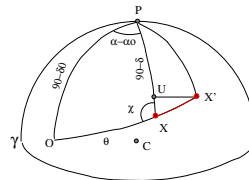
$$\sin \theta \sin \chi = \sin(90^\circ - \delta_0) \sin(\alpha - \alpha_0)$$

$$\sin \theta \cos \chi = \cos(90^\circ - \delta_0) \sin(90^\circ - \delta) - \sin(90^\circ - \delta_0) \cos(90^\circ - \delta) \cos(\alpha - \alpha_0)$$

a po podstawieniu prawych stron tych równań do (22), ostatecznie będzie:

$$d\alpha = k \sec \delta \cos \delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0)$$

$$d\delta = k(\sin \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos \delta \sin \delta_0) \quad (23)$$



Formuły na przystoty $d\mathbf{s}$ wektora położenia

Założenia

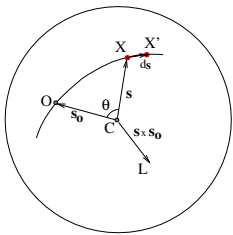
Niech:

- położenie punktu O wyznacza wektor $\mathbf{s}_0,$
- wektor \mathbf{s} wyznacza położenie punktu $X,$
- kierunek do X' opisuje wektor $\mathbf{s} + d\mathbf{s}.$

Zgodnie z koncepcją małego przesunięcia, $d\mathbf{s}$ leży w płaszczyźnie koła wielkiego $OX.$

Iloczyn wektorowy $\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0$ jest wektorem o długości $\sin \theta$ skierowanym do punktu $L.$

Punkt L jest biegunem koła wielkiego OX gdyż odległy jest o 90° zarówno od O jak i od $X.$



Formuły na przystoty $d\mathbf{s}$ wektora położenia

Położenie punktu X' wyznaczą \mathbf{s} i niezny wektor $d\mathbf{s}.$

Wyprowadzenie

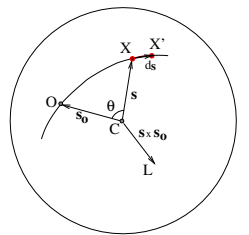
Szukamy wektora $d\mathbf{s}$ i w tym celu potrzebna nam nazwiazka, w którym występuje $d\mathbf{s}.$ Np. różniczkujemy iloczyn $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$

$$\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (24)$$

$d\mathbf{s}$ jest więc prostopadły do \mathbf{s} a także do $\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0,$ stąd $d\mathbf{s}$ skierowany jest zgodnie z kierunkiem wektora $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0)$ o długości $\sin \theta.$

Wektorowy odpowiednik (23) ma postać

$$d\mathbf{s} = k \sin \theta d\mathbf{s} = k \sin \theta \frac{\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0)}{\sin \theta} = k \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0) \quad (25)$$



Transformacje współrzędnych. Wstęp.

Układy współrzędnych prostokątnych przedstawiamy za pomocą trójek $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k},$ ujętych w macierz $\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ zwaną triadą.

Wzajemna ortogonalność wektorów $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ pociąga ortogonalność triady $\mathbf{R},$ co objawia się własnością $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I},$ gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Składowe tego samego wektora \mathbf{a} mogą być wyznaczone w różnych układach współrzędnych, czyli względem różnych triad, np. \mathbf{R} i $\mathbf{P}:$

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Mnożąc (26) lewostronnie przez \mathbf{R}^T widzimy, że:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Zatem transformacja składowych $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ w składowe $[a_1, a_2, a_3]$ może być dokonana za pośrednictwem iloczynu macierzy $\mathbf{R}^T \mathbf{P},$ a transformacja odwrotna za pomocą $\mathbf{P}^T \mathbf{R}.$

Macierz obrotu wokół osi X (1).

Wyprowadzenie

Interesuje nas przeliczenie współrzędnych z układu zdefiniowanego triadą $\mathbf{R} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ do układu danego triadą $\mathbf{R}_1 = [\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1].$ Ponieważ oba układy różnią się jedynie o dodatni obrót o kąt θ wokół osi $\mathbf{i},$ stąd, składowe triady \mathbf{R}_1 obliczymy za pomocą składowych triady $\mathbf{R}:$

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{j}_1 = (\cos \theta)\mathbf{j} + (\sin \theta)\mathbf{k}$$

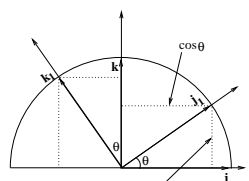
$$\mathbf{k}_1 = (-\sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \theta)\mathbf{k}$$

A w postaci dogodnej do umacierzowania zapisu:

$$\mathbf{i}_1 = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_1 = 0\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + (\sin \theta)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}_1 = 0\mathbf{i} + (-\sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \theta)\mathbf{k}$$



Macierz obrotu wokol osi X (2).

Wyprowadzenie cd

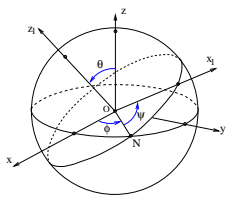
Zatem triade R_1 mozemy przedstawic jako iloczyn macierzowy:

$$R_1 = [i_1, j_1, k_1] = R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Poszukiwana transformacja $R_1^T R$ ma postac:

$$R_1^T R = \left[R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right]^T \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Katy Eulera.



Definicja

Dwa układy współrzędnych zorientowano względem siebie tak, że żadna para osi tych układów nie jest do siebie wzajemnie równoległa. Jest to najbardziej ogólny przypadek orientacji układów, określonej za pomocą trzech kątów Eulera:

- kąt θ zawarty pomiędzy osiami Z i Z₁ obu układów,
- kąt ϕ zawarty pomiędzy osią X i linią ON przecięcia płaszczyzn X-Y, X₁-Y₁ obu układów,
- kąt ψ pomiędzy osią X₁ i linią ON, liczony jako dodatni od linii ON do osi X₁.

Macierze lustrzanych odbić.

Definicja

Macierz transformacyjna dla układów różniących się jedynie skrętnością (przypadek układów lewo i prawoskrętnych) jest macierzą modyfikującą wyłącznie współrzędną Y-ową (lustrzane odbicie względem płaszczyzny X-Z), ma ona postać:

$$M_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Niekiedy korzystnym będzie zastosowanie macierzy M_x lustrzanego odbicia względem płaszczyzny Y-Z, w wyniku której uzyskamy zmianę znaku współrzędnej X-owej.

$$M_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dygresja na temat miary małych kątów.

Pomiędzy miarami tego samego kąta, radianami i stopniami mamy znane przybliżone związki:

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45'' = 206265'' \quad (36)$$

Radiany wykorzystywane są w przybliżeniach małych kątów, w których dopuszczalne są aproksymacje niektórych funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \theta \\ \cos \theta &\approx 1 \\ \tan \theta &\approx \theta \end{aligned} \quad (37)$$

Z równań (36), (37) wynika, że:

$$\sin 1'' = \frac{1''}{206265''} \quad (38)$$

Wyrażenie to znakomicie nadaje się do zamiary radianów na sekundy łuku. Np. jeśli zapis θ'' oznacza liczbę sekund w małym kącie θ , to

$$\sin \theta \approx \theta \approx \frac{\theta''}{206265''} = \theta'' \sin 1''$$

Macierz obrotu wokol osi X, Y, Z.

Wniosek

Jeśli dwa układy różnią się tylko transformacją obrotu wokół osi X o dodatni kąt θ , to współrzędne (składowe wektora) $[x_1, y_1, z_1]^T$ względem układu obróconego uzyskamy ze współrzędnych $[x, y, z]^T$ względem układu nieobróconego za pomocą:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = p(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$p(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (29)$$

Dla układów różniących się obrotami o dodatni kąt θ wokół osi Y i Z, odpowiednie macierze transformacyjne $q(\theta)$ i $r(\theta)$ mają postać:

$$q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Transformacja współrzędnych z wykorzystaniem kątów Eulera.

Definicja

Transformacja współrzędnych $[x, y, z]^T$ we współrzędne $[x_1, y_1, z_1]^T$, jest złożeniem trzech obrotów

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = r(\psi)p(\theta)r(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (31)$$

Jeśli mamy do dyspozycji kąty Eulera określające wzajemną orientację dwóch układów współrzędnych kartezjańskich, to transformacja pomiędzy współrzędnymi z tych układów zawsze będzie miała postać (31).

Przemiana współrzędnych prostokątnych i sferycznych.

Definicja

W celu praktycznego zastosowania formuł podanych wyżej musimy dysponować wzorami umożliwiającymi transformację współrzędnych sferycznych do współrzędnych prostokątnych i odwrotnie.

Jeśli dane są (u, v) położenia ciała niebieskiego, gdzie u jest współrzędną azymutalną a v jest dopełnieniem do 90° odległości biegunowej, to odpowiadające im prostokątne składowe wersora położenia tego ciała wyliczamy za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} x &= \cos u \cos v \\ y &= \sin u \cos v \\ z &= \sin v \end{aligned} \quad (34)$$

Zależności odwrotne mają postać:

$$\begin{aligned} v &= \arcsin z \\ u &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (35)$$

przy czym w celu ustalenia właściwej ćwiartki kąta u musimy zastosować stosowną procedurę normującą.

Podsumowanie

- Sfera niebieska jest pożyteczną koncepcją ułatwiającą wyznaczenie kierunków do ciał niebieskich, badanie zmienności tych kierunków, katalogowanie.
- Położenia na sferze można wyznaczyć za pomocą wektorów o składowych odpowiadających triadzie ustalającej konkretny układ współrzędnych prostokątnych. Składowe wektora podane względem danej triady, za pomocą macierzy obrotu i macierzy odbić, można przeliczyć w składowe względem innej triady.
- Astronomowie lubią korzystać ze sferycznych układów współrzędnych, w których położenia ciał na sferze podane są za pomocą dwóch kątów ψ, θ .
- Trygonometria sferyczna dostarcza m.in. kilku rodzajów formuł pozwalających na rozwiązywanie szeregu problemów dotyczących trójkątów sferycznych.
- W dalszym toku wykładu poznamy zjawiska powodujące zmiany położenia ciał niebieskich. Wielkość tych zmian opiszemy jednolitym aparatem matematycznym, który określiliśmy mianem - małego przesunięcia.



Sintra, Portugal



Powiat